分布質量系で外力

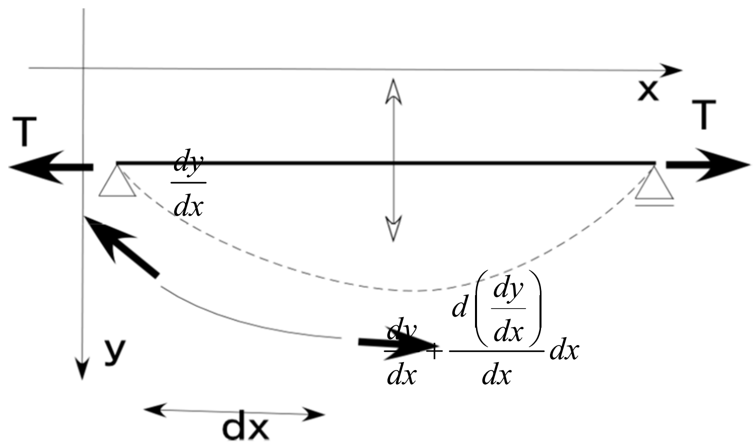
講義中に紹介するといった式の展開解の例

弦に限定

- 微少変形
  - 弦は伸びない　不伸張　張力変化はない
  - 運動に伴う傾きによる，運動方向への分力が反力
- 運動方程式はダランベールの原理を適用すると
- ρは単位長さあたりの弦の質量
- 減衰は話しが複雑になるのでｈ＝０を設定し，減衰項はなし

$$-\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left(-T\frac{\partial y}{\partial x}+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}dx\right)\right)=0$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



形状を決めるための境界条件を適用

- 境界条件は弦の長さがLとすると

$$Y\Big|_{at\,x=0} = Y\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

$$Y\Big|_{at\,x=0} = C_2 = 0$$

両端は留まっている

$$Y\Big|_{at\,x=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = C_1 \sin(\lambda L) = 0$$

$$\lambda L = n\pi \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

$$Y_n = C_{1,n} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{T}} \Rightarrow \ \omega_n = \lambda_n\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- 斉次解→

$$y = \sum_{j=1} y_j = \sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t)$$

試験問題として出しやすい外力の特殊例

- 解ける可能性がある例は多くない
- 弦とか単純梁とか簡単例
  - 斉次解の形は同じ
  - 外力をｆ（ｘ，ｔ）とおく
- 三角関数の直交性から
  - のこるは自乗になる項のみ
  - 他は残らない
- 他には，等分布外力
  - 対称モードのみ
  - 逆対称モードは積分で消える

$$y = \sum_{j=1} y_j = \sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t)$$

$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) f(x,t) dx$$

$$f(x,t) \equiv F_0 \sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t)$$

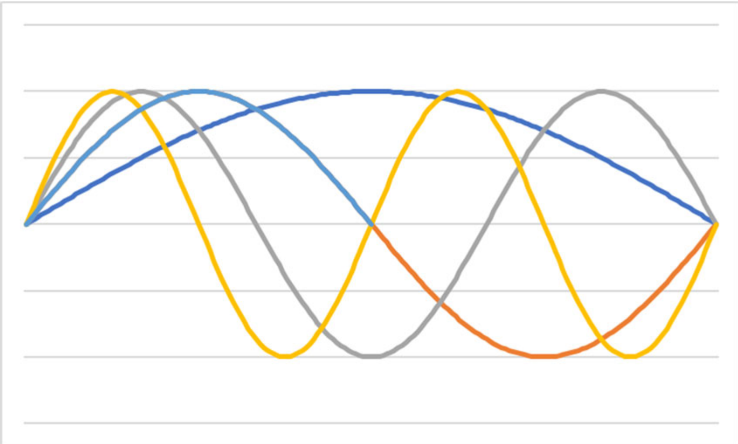
$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) F_0 \sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t) dx$$

$$= F_0 \int \sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x) dx \exp(i\omega_e t)$$

$$= \begin{cases} F_0 \int_0^L \sin^2(\frac{k\pi}{L}x) dx \exp(i\omega_e t) = \frac{F_0 L}{2}\exp(i\omega_e t) & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$\int_0^L \sin^2(\frac{k\pi}{L}x) dx = \int_0^L \frac{1-\cos(2\frac{k\pi}{L}x)}{2} dx = \frac{L}{2}$$

前頁の例は正弦波状外力振幅の外力の場合



- スパンの半分？

$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) f(x,t)dx$$

$$f(x,t) \equiv F_0 \sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t)$$

$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) F_0 \sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t)dx$$

$$= F_0 \int \sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx \exp(i\omega_e t)$$

$$= \begin{cases} F_0 \int_0^L \sin^2(\frac{k\pi}{L}x)dx \exp(i\omega_e t) = \frac{F_0 L}{2}\exp(i\omega_e t) & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

外力作用範囲がスパン半分だったら

$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) f(x,t) dx$$

- 積分範囲が
  - ［0，L/2］

$$f(x,t) \equiv \begin{cases} F_0 \sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t) & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$F_j(t) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) f(x,t) dx = F_0 \int_0^{\frac{L}{2}} \sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x) dx \exp(i\omega_e t)$$

$$= -\frac{F_0}{2}\left[\frac{L}{(j+k)\pi}\sin\left(\frac{(j+k)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{(j-k)\pi}\sin\left(\frac{(j-k)\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} \exp(i\omega_e t)$$

$$= \begin{cases} -\frac{F_0}{2}\left(\frac{L}{2\pi j}\sin(j\pi) - \frac{L}{2}\right)\exp(i\omega_e t) & j = k \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{L}{(j+k)\pi}\sin\left(\frac{(j+k)\pi}{2}\right) - \frac{L}{(j-k)\pi}\sin\left(\frac{(j-k)\pi}{2}\right)\right)_0^{\frac{L}{2}} \exp(i\omega_e t) & j \ne k \end{cases}$$

$$\sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{(j+k)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(j-k)\pi}{L}x\right)\right)$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x) dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{L}{(j+k)\pi}\sin\left(\frac{(j+k)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{(j-k)\pi}\sin\left(\frac{(j-k)\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

等分布振幅の外力だったら

- これは簡単ですね
  - 外力作用範囲が限定されるとかなり面倒
- K=偶数
  - 一般化外力ゼロ
  - 非対称、中央で節
- K=奇数
  - 対称、かつ中央が腹

$$f\left(x,t\right) \equiv F_0 \exp(i\omega_e t)$$

$$F_j\left(t\right) = \int \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) f\left(x,t\right) dx$$

$$F_j\left(t\right) = \int \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) F_0 \exp(i\omega_e t) dx$$

$$= F_0 \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \exp(i\omega_e t)$$

$$= F_0 \left(1 - \cos\left(k\pi\right)\right) \exp(i\omega_e t)$$

$$F_j\left(t\right) = F_0 \left(1 - \cos\left(k\pi\right)\right) \exp(i\omega_e t)$$

$$= \begin{cases} 0 & k = even \\ 2F_0 \exp(i\omega_e t) & k = odd \end{cases}$$

課題

- 一般化外力が求められたら、特異解が定まる。
- 次の二つを考えてほしい
  - 一般解はどのようなものになるか
  - 例えば、弦の全体で速度ゼロ、変位が制限半波だとした、初期条件が与えられたとき、どのようにモードごとの係数を定めたらいいか

弦の場合だけど、まず全般的に

- 一般解は
  - 斉次解＋特異解で、特異解は一般化外力に対して決まり、振動モードごと
  - 振動モードごとの斉次解＋特異解の和が一般解

$$y_j = A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t)$$:j 次モードの斉次解

$$F_j\left(t\right) = \int \sin(\frac{j\pi}{L}x) f\left(x,t\right)dx$$:j 次モードの一般化外力

$$\rightarrow y_{pat,j}$$:j 次モードの特異解

$$y = \sum_{j=1}\left(y_j + y_{pat,j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}\left(A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t) + y_{pat,j}\right)$$

- この場合、外力はゼロでいいので、全ての特異解はゼロ
- 従って時刻ｔ＝0の変位（初期条件で正弦半波）を一般解と整合させればよく、係数を決めれば良い

$$y_{pat,j} = 0$$

$$y\Big|_{t=0} = \sum_{j=1} \left(A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t) \right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x) = A_o \sin(\frac{\pi}{L}x)$$

- 係数を決めれば良いので
- 正弦関数の直交性を使い

$$\sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x) = A_o \sin(\frac{\pi}{L}x)$$

$\sin(\frac{k\pi}{L}x)$を両辺に掛けてスパンで積分

$$\int_0^L \left(\sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x) \right) \sin(\frac{k\pi}{L}x)dx = \int_0^L A_o \sin(\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx \quad k: \text{整数}$$

$$A_j = \begin{cases} A_o & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}$$