

構造動力学

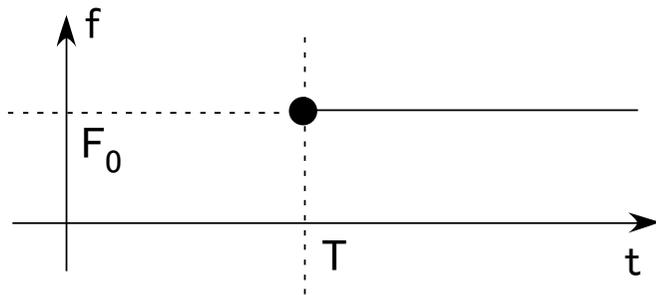
第4回の2

不規則な外力応答への拡張

- 外力は調和的な場合に限らない
 - 繰り返しが続くような場合
 - 不規則ではあるけど、ある程度の規則性を持って繰り返す
 - 「定常」として統計的な扱いができる
 - 雑多な交通で見られるような不規則な外力
- 繰り返しは期待できない
 - 統計的な扱いは困難
 - 衝突のようなショック
 - まずは、ステップ、衝撃の応答例から
 - 単調な（単調ではなくても）増加、減少外力
- 不規則？
 - 正弦波のような調和的でないが、統計的な意味で「定常」

ステップ外力の意味

- 衝撃応答への拡張
- この問題は過渡応答
- 一般解をちゃんと解く



時間微分です。
元ファイルが間違ってます。 →

$$\int_{-\infty}^t f_{impulse} dt = f_{step}$$

$$\int_{-\infty}^t u_{impulse} dt = u_{step}$$



$$f_{impulse} = \frac{df_{step}}{dt}$$

$$u_{impulse} = \frac{du_{step}}{dt}$$

二つの外力と運動方程式の関係

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + kx = f(t)$$

ステップ

$$m \frac{d^2 u_{step}}{dt^2} + c \frac{du_{step}}{dt} + ku_{step} = f_{step}(t)$$

- 両辺を時間微分
- 下から上の逆方向
だったら時間積分

$$d \left(m \frac{d^2 u_{step}}{dt^2} + c \frac{du_{step}}{dt} + ku_{step} \right) / dt = d(f_{step}(t)) / dt$$

$$m \frac{d^2 d(u_{step}) / dt}{dt^2} + c \frac{d d(u_{step}) / dt}{dt} + k \frac{d(u_{step}) / dt}{dt} = \frac{d(u_{step})}{dt}$$

衝撃

$$m \frac{d^2 u_{imp}}{dt^2} + c \frac{du_{imp}}{dt} + ku_{imp} = f_{imp}(t)$$

ステップ外力

• 運動方程式的な展開

$$f(t-T) = 0 \quad t < T$$

$$= F_e \quad t \geq T$$

$$T \doteq 0$$

$$f(t) = 0 \quad t < 0$$

$$= F_e \quad t \geq 0$$

後者 $t > 0$ の特異解

一般的には時間をTシフトした状況を考える

$$x_e = \frac{F_e}{k}$$

一般解

$$x = \exp(-h\omega t) \left(A_1 \exp(i\omega_o \sqrt{1-h^2} t) + A_2 \exp(-i\omega_o \sqrt{1-h^2} t) \right) + \frac{F_e}{k}$$

$t = 0$ での整合条件 (区間で言えば初期値)

$$x = \dot{x} = 0$$

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t) (A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)) + \frac{F_e}{k}$$

$$\because \omega_D = \omega_o \sqrt{1-h^2}$$

$$x(t=0) = (A_1 + A_2) + \frac{F_e}{k} = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = -h\omega_o (A_1 + A_2) + (A_1 i\omega_D - A_2 i\omega_D) = 0$$

$$A_1 (-h\omega_o + i\omega_D) = A_2 (h\omega_o + i\omega_D)$$

$$A_1 \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{(h\omega_o + i\omega_D)} = A_2$$

$$(A_1 + A_2) + \frac{F_e}{k} = 0$$

$$= \left(1 + \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{(h\omega_o + i\omega_D)} \right) A_1 + \frac{F_e}{k}$$

$$= \frac{i\omega_D}{(h\omega_o + i\omega_D)} A_1 + \frac{F_e}{k}$$

$$A_1 = -\frac{F_e}{k} \frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D}$$

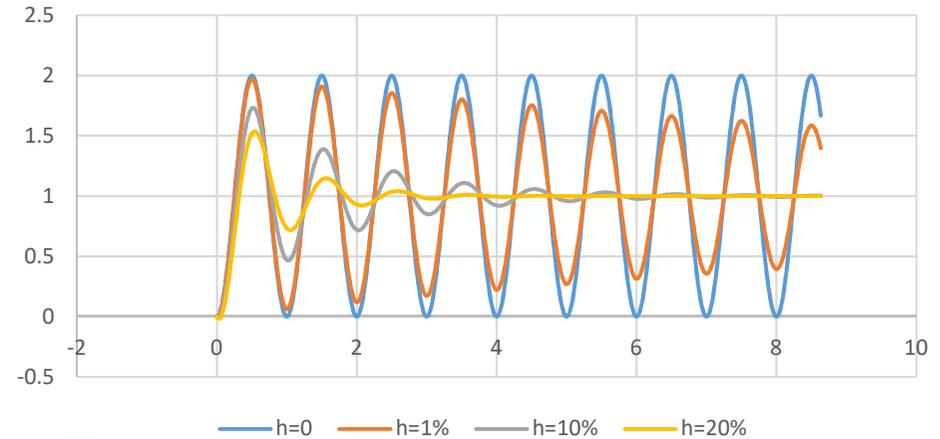
$$A_2 = A_1 \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{(h\omega_o + i\omega_D)} = -\frac{F_e}{k} \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{i\omega_D}$$

$$A_1 + A_2 = -\frac{F_e}{k}$$

$$A_1 - A_2 = -\frac{F_e}{k} \frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D} + \frac{F_e}{k} \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{i\omega_D} = -\frac{F_e}{k} \frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$

ステップ外力 つづき

ステップ応答



$$x(t) = \exp(-h\omega_o t) (A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)) + \frac{F_e}{k}$$

$$\therefore \omega_D = \omega_o \sqrt{1-h^2}$$

$$A_1 + A_2 = -\frac{F_e}{k}$$

$$A_1 - A_2 = -\frac{F_e}{k} \frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D} + \frac{F_e}{k} \frac{(-h\omega_o + i\omega_D)}{i\omega_D} = -\frac{F_e}{k} \frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t) (A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)) + \frac{F_e}{k}$$

$$= \exp(-h\omega_o t) \left((A_1 + A_2) \cos(\omega_D t) + (A_1 - A_2) i \sin(\omega_D t) \right) + \frac{F_e}{k}$$

$$= -\frac{F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin(\omega_D t) \right) + \frac{F_e}{k}$$

衝擊応答

$$\omega_D = \omega_o \sqrt{1-h^2}$$

$$x_{step}(t) = -\frac{F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin(\omega_D t) \right) + \frac{F_e}{k}$$

$$x_{impulse}(t) = \frac{dx_{step}(t)}{dt}$$

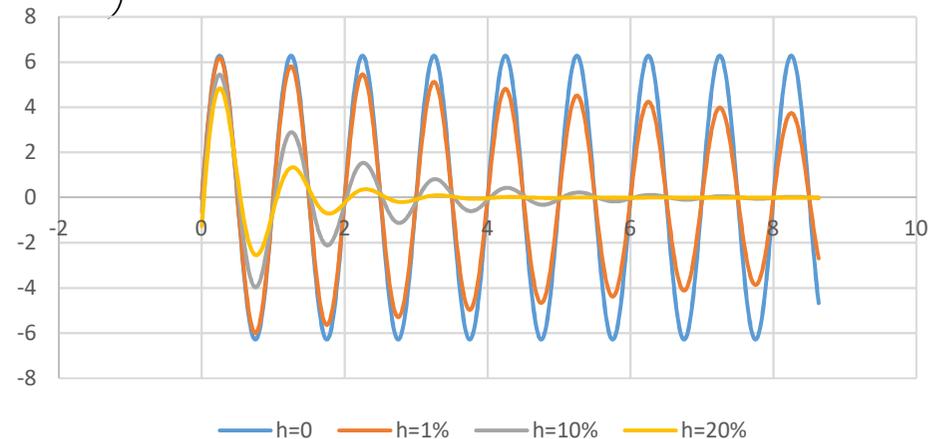
$$= \frac{h\omega_o F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin(\omega_D t) \right) - \frac{\omega_D F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(-\sin(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \cos(\omega_D t) \right)$$

$$= \frac{F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\left(\frac{2hh\omega_o}{\sqrt{1-h^2}} + \omega_D \right) \sin(\omega_D t) + \left(h\omega_o - \frac{2h\omega_D}{\sqrt{1-h^2}} \right) \cos(\omega_D t) \right)$$

$$= \frac{F_e}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\left(\frac{2hh\omega_o + \omega_o(1-h^2)}{\sqrt{1-h^2}} \right) \sin(\omega_D t) + (h\omega_o - 2h\omega_o) \cos(\omega_D t) \right)$$

$$= \frac{F_e}{k} \frac{\exp(-h\omega_o t)}{\sqrt{1-h^2}} \left((1+h^2) \omega_o \sin(\omega_D t) - h\omega_D \cos(\omega_D t) \right)$$

衝擊応答



単位の外力

$t > 0$

- 単位 = 1 の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
 - 線形だったら応答は大きさ倍

$$x_{unit\ step}(t) = -\frac{1}{k} \exp(-h\omega_o t) \left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \sin(\omega_D t) \right) + \frac{1}{k}$$

$$x_{unit\ impulse}(t) = \frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}} \left((1+h^2)\omega_o \sin(\omega_D t) - h\omega_D \cos(\omega_D t) \right)$$

- ある時刻の外力の連続
 - 応答の重ね合わせ

$$f(t) = \{\dots, f(t_n), \dots\}$$

↓

$$u(t) = \sum_i f(t_i) x_{unit\ impulse}(t - t_i)$$

$$= \int_{-\infty}^t f(T) x_{unit\ impulse}(t - T) dT$$

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分 convolution

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(T) x_{unit\ impulse}(t-T) dT$$

- これをフーリエ変換, T と $t - T$ で別々に変換することができて

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= F(\omega) X_{unit\ impulse}(\omega) & \langle\langle U(\omega)U^*(\omega) \rangle\rangle &= \langle\langle F(\omega)F^*(\omega) \rangle\rangle \frac{1}{k} H(\omega_e) \frac{1}{k} H^*(\omega_e) \\
 X(\omega_e) &= \frac{1}{k} H(\omega_e) F(\omega_e) & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle\langle U(\omega)U^*(\omega) \rangle\rangle}{T} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle\langle F(\omega)F^*(\omega) \rangle\rangle}{T} \frac{1}{k^2} H(\omega_e) H^*(\omega_e) \\
 X_{unit\ impulse}(\omega) &= \frac{1}{k} H(\omega_e) & S_U(\omega) &= S_F(\omega) \frac{1}{k^2} |H(\omega_e)|^2
 \end{aligned}$$

- 不規則外力とするとFは不確定, 確率量, x はシステムで決まる決定的な量
 - 確率的な扱い
 - 結果的にUも確率的な扱いが必要

課題

- 用語の意味をまとめよう
 - 統計的に「定常」
 - 不規則な外力の例
 - フーリエ変換