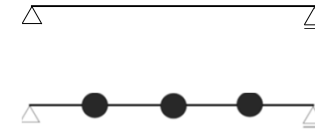
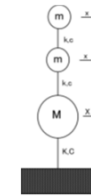


分布質量系，多自由度系への拡張

1

分布質量系 多自由度系

- 分布質量系
 - 構造特性に分布がある
 - 基本構造なら梁とか弦とか，
 - 一般の構造物
- 多自由度系
 - 自由度が多い系の話し
 - 代表的な動きで離散化
 - 有限要素モデル



2

手を動かして、解けるものが、
弦と梁しかない
まずは、例題として「弦」

3

まずは，弦から

- 弦は張力の構造 教科書 2. 6. 3
- 微小変形
 - 弦は伸びない 不伸張 張力変化はない
 - 運動に伴う傾きによる，運動方向への分力が反力
- 運動方程式はダランベールの原理を適用すると
- ρ は単位長さあたりの弦の質量
- 減衰は話しが複雑になるので $h = 0$ を設定し，減衰項はなし

$$-\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(-T \frac{\partial y}{\partial x} + T \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} dx \right) \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

4

変位 y は位置 x と時間の関数

- 変位 y が位置と時間の2独立変数を持つ関数なので、偏微分になっている
- 教科書とおりとしても良いが、**変数分離型の解法** 戦略を考える

$$y = Y(x)q(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \rho Y \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = Tq \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{cases}$$

いつものように $q(t) \triangleq A \cdot \exp(i\omega t)$

$$-\rho Y \omega^2 A \cdot \exp(i\omega t) = T \frac{d^2 Y}{dx^2} A \cdot \exp(i\omega t)$$

$$\left(\rho \omega^2 Y + T \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) q = 0$$

$$\left(\rho \omega^2 Y + T \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) = 0 \quad \because q \neq 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}}$$

5

天りり的な正弦波形状関数の解というわけではない

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho Y \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = Tq \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$-\rho Y \omega^2 A \cdot \exp(i\omega t) = T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} A \cdot \exp(i\omega t)$$

$$\left(\rho \omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) q = 0$$

$$\left(\rho \omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \because q \neq 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}}$$

• 細かくは

$$\left(\rho \omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \because q \neq 0$$

$$Y = C \exp(\Lambda x) \text{ として}$$

$$\Lambda = \pm i\lambda \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}}$$

$$Y = C_1 \exp(i\lambda x) + C_2 \exp(-i\lambda x)$$

$$= (C_1 + C_2) \cos(\lambda x) + i(C_1 - C_2) \sin(\lambda x)$$

$$\Rightarrow C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

6

形状を決めるための境界条件を適用

- 境界条件は弦の長さが L とすると

$$Y|_{ax=0} = Y|_{ax=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

$$Y|_{ax=0} = C_2 = 0 \quad \text{両端は留まっている}$$

$$Y|_{ax=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = C_1 \sin(\lambda L) = 0$$

$$\lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$Y_n = C_{1,n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{T}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T}} \Rightarrow \omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

• 斉次解 \rightarrow

$$y = \sum_{j=1} y_j = \sum_{j=1} A_j \sin\left(\frac{j\pi}{L} x\right) \exp(i\omega_j t)$$

7

次に
例題として、「梁」

8

梁では？構造力学を思い出して

- せん断力レベルでの慣性力との釣り合い

- ダランベールの原理を適用 $\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0$

- 曲げ剛性EI, 単位長さあたり重量wは均一を仮定

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

$$y = Y(x)q(t) = Y(x)A \exp(i\omega t)$$

$$\left(-\frac{w}{g} \omega^2 Y + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \right) q = 0$$

$$\lambda^4 \triangleq \frac{w}{gEI} \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gEI}{w}} \lambda^2$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}, \quad \cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

9

境界条件で未定定数Cを決める

- 要な境界条件は4つ→自明なものが良い
 - 二個変位 (Y=0) ともう二個曲げモーメント (2階微分がゼロ) とかせん断力 (3階微分がゼロ),
 - 四つ変位とか

- 例えば, スパンLの

- 単純梁

$$Y|_{atx=0} = Y|_{atx=L} = 0, \quad Y''|_{atx=0} = Y''|_{atx=L} = 0$$

- 片持ち梁

$$Y|_{atx=0} = Y'|_{atx=0} = 0, \quad Y''|_{atx=L} = Y'''|_{atx=L} = 0$$

- 両端埋め込み梁

$$Y|_{atx=0} = Y|_{atx=L} = 0, \quad Y'|_{atx=0} = Y'|_{atx=L} = 0$$

10

単純梁の場合

$$Y|_{atx=0} = Y|_{atx=L} = 0, \quad Y''|_{atx=0} = Y''|_{atx=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$Y|_{atx=0} = C_2 + C_4 = 0$$

$$Y|_{atx=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$Y''|_{atx=0} = -\lambda^2 C_2 + \lambda^2 C_4 = 0$$

$$Y''|_{atx=L} = -\lambda^2 C_1 \sin(\lambda L) - \lambda^2 C_2 \cos(\lambda L) + \lambda^2 C_3 \sinh(\lambda L) + \lambda^2 C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{gEI}{w}} \lambda_j^2 = \left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{w}}$$

$$y = \sum_j A_j \sin\left(\frac{j\pi}{L} x\right) \exp(i\omega_j t)$$

11

両端埋め込み梁だったら

$$Y|_{atx=0} = Y|_{atx=L} = 0, \quad Y'|_{atx=0} = Y'|_{atx=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$Y|_{atx=0} = C_2 + C_4 = 0$$

$$Y|_{atx=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$Y'|_{atx=0} = \lambda C_1 + \lambda C_3 = 0$$

$$Y'|_{atx=L} = \lambda C_1 \cos(\lambda L) - \lambda C_2 \sin(\lambda L) + \lambda C_3 \cosh(\lambda L) + \lambda C_4 \sinh(\lambda L) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \cos(\lambda L) & -\sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0$$

- 係数側の行列式=0でとけるけど, 大変

12

ここまでは斉次解

- 外力がある場合の流れ
 - 斉次解を求め、振動モードごとに分解
 - モーダルアナリシスに持ち込む
 - 振動モードごとの特性を決め
 - 一般化質量
 - 一般化剛性
 - 一般化外力
 - 固有振動数
 - 一自由度系の時に学んだ特異解に持ち込む

13

課題

- 分布質量系で
 - 一般化質量
 - 一般化剛性
 - 一般化外力
 - 固有振動数
- について、まとめてみよう

14