構造動力学

第５回の２

1

線形のシステム

- 重ね合わせの効く線形系を仮定している
  - 対するのが非線形
- 実は、世の中はほとんどが非線形
  - 振動でも非線形系の方が使い勝手のよい振動になり得る機能
  - ダンパーでも速度に完全比例特性のものはない
  - となると、すべて非線形とすべきか
- 線形系でも多くの場合ある程度の精度
  - 精度を見極めて適用するのが工学
    - 理学は真理の追究
  - 非線形性は線形系からの若干の乖離とみる
- 線形系だとしたら、固有値問題が使える

2

固有モードに着目した解析

- モーダルアナリシス Modal Analysis という
  - 固有モードに着目した解析
  - 固有モードごとの解析
- 固有値問題の解だから直交性が使えて、
  - 振動の形が固有モード
  - 固有振動数が固有値

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}\equiv\begin{Bmatrix}X\\x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A\\a\end{Bmatrix}\exp(\omega t)=\boldsymbol{\varphi}q(t)$$

$$\mathbf{X}_j\equiv\begin{Bmatrix}X_j\\x_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A_j\\a_j\end{Bmatrix}\exp(\omega_j t)=\mathbf{A}_j\exp(\omega_j t)$$

$$=\boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)$$

$$\left(\omega_j^{\,2}\mathbf{M}\mathbf{A}_j+\omega_j\mathbf{C}\mathbf{A}_j+\mathbf{K}\mathbf{A}_j\right)\exp(\omega_j t)=\mathbf{F}$$

$$\left(\omega_j^{\,2}\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{M}\mathbf{A}_j+\omega_j\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_j+\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}_j\right)\exp(\omega_j t)=\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{F}$$

$\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{M}\mathbf{A}_j$: *generalized Mass*

$\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_j$: *generalized damping*

$\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}_j$: *generalized stiffness*

$\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{F}$: *generalized external force*

3

２自由度系の一般化質量 generalized Mass

- ２自由度系をとくと。。展開は前回の続き
  - **A=1**がミソで付加系の振動振幅の影響が大きい

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}M&0\\0&m\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{M}&0\\0&\frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

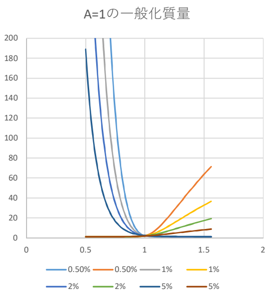
$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}K+k&-k\\-k&k\end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{A}=-\left(\frac{\kappa-1}{\omega_T^{\,2}\mu}-1\right)\ and\ =\frac{\omega_T^{\,2}}{\kappa-\omega_T^{\,2}}$$

$$M_j=\left(M+m\left(\frac{\omega_T^{\,2}}{\kappa-\omega_T^{\,2}}\right)^2\right)A^2=M\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T^{\,2}}{\kappa-\omega_T^{\,2}}\right)^2\right)A^2$$

$$A\equiv1$$

$$M_j=M\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T^{\,2}}{\kappa_j-\omega_T^{\,2}}\right)^2\right)$$



4

正弦波外力があった場合の応答

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\varphi}q(t)$$

$$\mathbf{X}_j\equiv\boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j\ddot{q}_j(t)+\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_j\dot{q}_j(t)+\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)=\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{F}$$

Modal analysis

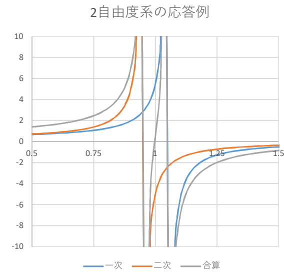
$$M_j\ddot{q}_j(t)+C_j\dot{q}_j(t)+K_jq_j(t)=F_j$$

- 以上のように１自由度系と同じくモード毎に扱うことができる
- 特徴を思い出すと
  - 動的応答倍率
  - 共振を過ぎると位相が反転
    - 共振点は固有モードがふたつあるので二つ

5

動的応答倍率の例

- 質量比μ＝１％
- 同調比ω_T＝１
- κ=0.9048　平方根は0.9512
- κ=1.105 平方根は1.051
- 共振時に振動がなくなるように見える
  - 動的吸振器



$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$\omega_o{}^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}\equiv\omega_M{}^2\kappa$$

$$A_j=\frac{F_{o_j}M_j/M_jk_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}=\frac{F_{o_j}/M_j\omega_{oj}{}^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}$$

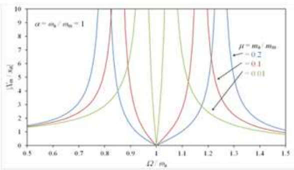
$$=\frac{F_{o_j}\Big/K\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\kappa_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}=\frac{F_{o_j}}{K}\frac{1\Big/\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\kappa_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2\right)}$$

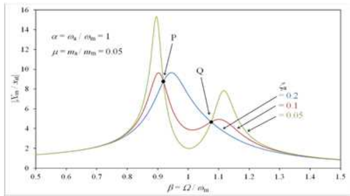
$$M_j=M\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\ and\ h=0$$

6

減衰がある場合

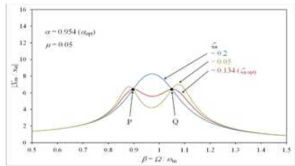
- 減衰がない場合では，系の中で運動エネルギーの損失はない
  - 単なる振動形の重ね合わせの位相差を利用したのみ
  - 自由振動では減衰しない
- 減衰がある場合
- 特に補助振動系に減衰器がある場合
  - 補助振動系を大きく振動させればエネルギー減衰が期待できる
  - 調律減衰器　TMD





7

TMDの最適化



- 種々の判断基準
  - 例えば，P，Qを同じ高さにすれば任意の外力振動数に対し動的応答倍率を大きくしないですむ

表 6.1 各種振動に対する最適TMDと制振効果（付加減衰）

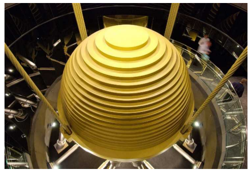
	調和外力振動	調和地盤振動	自由振動	自励振動	定常不規則強制振動
最適化基準	応答曲線の固定点を等しく最大点にする	増幅率曲線の固定点を等しく最大点にする	2つのモード減衰を等しく最大にする	2つのモードがともに安定でありうる負減衰を最大にする	構造物の2乗平均応答を最小にする
γ_{opt}	$\frac{1}{1+\mu}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$	$\frac{1}{1+\mu}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$	$\frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu}$
$(\xi_T)_{opt}$	$\sqrt{\frac{3}{8}\frac{\mu}{1+\mu}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}\frac{\mu}{1+\mu/2}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+3\mu/4)}{1+3\mu/2}}$
ξ_{eff}	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu/2}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu/4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1+3\mu/4}}$

- 表中のγ：振動数比ω_T
- 表中のξ：副振動系の減衰比
- 付加減衰

- 実際には副振動系の大きな振動は効率は良いが桁の中とか空間的な制約を生む場合が多い

8

台北１０１　WIKI



まとめると

- 2自由度系の定式化
- 適切に座標系を決め，ダランベールの原理を適用すれば良い
- 固有値問題として解く
- 振動モード（状態）毎の解析
  - モーダルアナリシス modal analysis
  - 振動モード形，基準座標（一般化座標）
  - 一般化質量，一般化減衰，一般化剛性，一般化外力
- 振動モードに分解できれば，モード毎には１自由度系の知見を拡張
- 動的吸振器は機械系で外力振動数が決まっている場合によく用いられる
- 橋やビルではTMDの適用例は少なくない.
  - ランドマークタワー，横浜ベイブリッジ．．．．．

9

課題

- 台北１０１の例で
- TMDの固有振動はいかほどか
  - 橋梁では径間長の０．０１倍程度、ビルでは高さの０．０２－０．０３程度が基本振動数になる場合が多い
  - 同調しているのか
- なぜ６００トンの質量が必要だったか

10