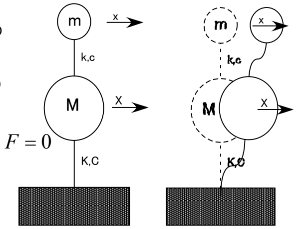
2自由度系への拡張

1

2自由度→動きが二つ

- 現実的には主構造（main structure）M,K,Cに追加の補助構造(**auxiliary** stucture)m,k,cがついているイメージ
- 主構造Mに関しダランベールの定理を適用

$$-M\ddot{X}-KX-C\dot{X}+k(x-X)+c(\dot{x}-\dot{X})+F=0$$



- 同様に
- 追加構造ｍに関しダランベールの定理を適用

$$-m\ddot{x}-k(x-X)-c(\dot{x}-\dot{X})+f=0$$

2

運動方程式をまとめると

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C+c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{X}\equiv\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{X}}+\begin{bmatrix} C+c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}+\begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{Bmatrix} F \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

- マトリクス形式で書くと見通しがいい

3

これを解く

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}\equiv\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} A \\ a \end{Bmatrix}\exp(\omega t)=\boldsymbol{\varphi}q(t)$$

- 係数のマトリクス
  - M:質量マトリクス
  - C：減衰マトリクス
  - K：剛性マトリクス
  - F:外力ベクトル

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}q(t)=\mathbf{F}$$

代入整理すると，↑を解けばよくい

SDOFの時と同様，F=0の斉次解から始め，次に特異解に進む

4

固有値問題としての扱い

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}q(t)=0$$

$$\Rightarrow\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

- 固有値問題の一般形で，2自由度系であってもそう簡単に解けない
- ωは固有値で減衰項があれば普通は複素数
- φは固有ベクトルで振動の場合は振動の形（物理的な振幅のような大きさではない）を示し，**形状関数**（**shape function**）とも呼ばれる．
- ｑは振動の基本軸（座標軸）として**基準座標，一般化座標(generalized coordinate)**とか呼ばれる
  - 座標軸は，直交座標系では位置を示し，座標軸間の角度は９０度で直交しているが，この場合はそうではない．
  - 各次元の成分を示しているのみの意味

5

非減衰C=0の場合

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$\Rightarrow\left|\left(\omega^2\mathbf{I}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)\right|=0$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{M} & 0\\ 0 & \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}K+k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\frac{K}{M}+\frac{K}{M}\frac{k}{K} & -\frac{K}{M}\frac{k}{K}\\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}\end{bmatrix}\quad\because\frac{K}{M}=\omega_M{}^2,\ \frac{k}{m}=\omega_m{}^2,\ \frac{k}{K}=\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_M{}^2+\omega_M{}^2\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M} & -\omega_M{}^2\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}\\ -\omega_m{}^2 & \omega_m{}^2\end{bmatrix}=\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M} & -\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}\\ -\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2} & \frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\end{bmatrix}$$

$$=\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\quad\because\omega_T{}^2=\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2},\ \mu=\frac{m}{M}$$

6

つづきで固有値を求める

$$\left|\left(\omega^2\mathbf{I}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)\right|=0$$

$$\lambda\equiv\frac{\omega^2}{\omega_M{}^2}$$

$$\left|\lambda\mathbf{I}-\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\left(\lambda-\left(1+\omega_T{}^2\mu\right)\right)\left(\lambda-\omega_T{}^2\right)-\omega_T{}^4\mu=0$$

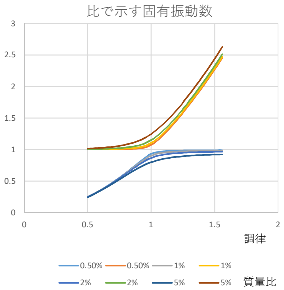
$$\lambda^2-\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\lambda+\left(1+\omega_T{}^2\mu\right)\omega_T{}^2-\omega_T{}^4\mu=0$$

$$\lambda^2-\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\lambda+\omega_T{}^2=0$$

$$\lambda=\omega_T{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\pm\sqrt{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)^2-4\omega_T{}^2}}{2}$$

$$\omega^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2+2\omega_T\right)\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2-2\omega_T\right)}}{2}$$

$$=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}$$



7

固有値から固有ベクトルを求める

$$\left(\omega_o{}^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$\omega_o{}^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}\equiv\omega_M{}^2\kappa$$

$$=\omega_M{}^2\frac{\omega_T{}^2}{2}\left(\left(\frac{1}{\omega_T{}^2}+1+\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\omega_T}+1\right)^2+\mu\right)\left(\left(\frac{1}{\omega_T}-1\right)^2+\mu\right)}\right)$$

$$\left(\omega^2\mathbf{I}-\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

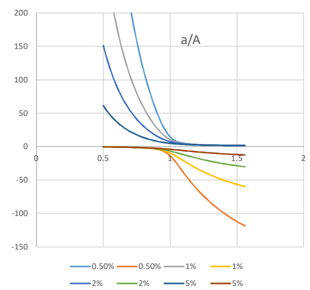
$$\omega_M{}^2\begin{bmatrix}\kappa-1-\omega_T{}^2\mu & \omega_T{}^2\mu\\ \omega_T{}^2 & \kappa-\omega_T{}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$A\left(\kappa-1-\omega_T{}^2\mu\right)+a\omega_T{}^2\mu=0\ \rightarrow a=-\left(\frac{\kappa-1}{\omega_T{}^2\mu}-1\right)A$$

$$A\omega_T{}^2+a\left(\kappa-\omega_T{}^2\right)=0\rightarrow a=-\frac{\omega_T{}^2}{\left(\kappa-\omega_T{}^2\right)}A$$

$$\frac{A}{a}=\frac{\omega_T{}^2\mu}{\kappa-1-\omega_T{}^2\mu}\ and\ =\frac{\kappa-\omega_T{}^2}{\omega_T{}^2}$$

$$\frac{a}{A}=-\left(\frac{\kappa-1}{\omega_T{}^2\mu}-1\right)\ and\ =\frac{\omega_T{}^2}{\kappa-\omega_T{}^2}$$



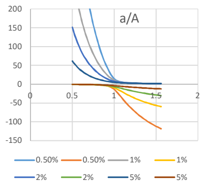
8

調律時の解

- 振動数比を１，質量比を１％あたりにおく
  - 振動数比を１とすること：調律する，調律した
  - 質量比の１％はそんなところ
- 固有値の符号に注意
  - 主構造より少し高い固有振動数の時は追加構造は主構造と反対側にふれる
  - 主構造より少し低い固有振動数の時は追加構造は主構造と同じ側にふれる

$$\omega^2=\omega_M{}^2\frac{1}{2}\left((2+\mu)\pm\sqrt{(4+\mu)\mu}\right)\approx\omega_M{}^2\frac{1}{2}(2.01\pm0.20)=\omega_M{}^2(0.905\ or\ 1.11)$$

$$\frac{a}{A}=-9.5\ \ or10.5$$



9

振動の形

- 固有ベクトル：形状関数
- 振動数の低い方から１次，２次，３次
  - ２自由度系では２次まで
- 基準座標毎の振動
  - 振動モード
    - 振動の状況
      - 振動モード形＝形状関数
  - 振動モード毎の解析
    - Modal analysis

10

課題

- 二自由度系の運動方程式を導出してみよう

11