近似解法による解析
時間領域の解析

1

近似解法

- 必ずしも容易に解を得られるわけではない
  - 近似解法を適用する提案が多い
  - 実用事例も多い
- 運動に関わるエネルギーを利用する場合
  - 一般には，運動方程式の汎関数が停留値を持つことを利用する場合
    - 変分原理の適用
  - 弾性力学では
    - 「エネルギー保存の原理」を使ったRayleigh法
    - 「ひずみエネルギーの最小原理」を使うRayleigh-Ritz法
  - 固有値，固有ベクトルを求めるなら，直感的で良い
- 運動方程式の残渣を最小にする場合
  - 重み付き残渣法
    - 残渣の自乗誤差を最小とする最小自乗法
    - 残渣を最小とする重み関数として近似関数を使うガラーキン法（Galerkin法）
    - ある点を選んで誤差を最小とする選点法
  - たぶんこっちの方がわかりやすいし，適用も柔軟

2

まずは言葉から

- 運動方程式
  - 本体Lと境界条件S

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f \;\rightarrow\; L[u]=0$$

$$u|_{at**}=u_0 \;\rightarrow\; S[u]=0 \;at**$$

- 汎関数
  - 運動（方程式）の基礎になるエネルギーの最小化
  - 要するに振動では運動エネルギーT，ポテンシャルエネルギーU，ひずみエネルギーを合わせた力学的エネルギーを示す関数

$$I=U-\omega^2 T$$

- 近似関数u_{app}
  - ベクトル空間を表すので基底関数とも言う

$$u_{app}=\sum_j a_j \Psi_j$$

$$R\left(u_{app}\right)=L\left[u_{app}\right] \;\leftarrow\; S\left[u_{app}\right]=0$$

- 誤差R

3

Rayleigh法

- 「i次の固有振動で一周期の間の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの平均値は等しい」

$$\frac{p_i}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{p_i}} Tdt=\frac{p_i}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{p_i}} Udt$$

- 基準座標（cos(ω t)とか）と運動形の概形が分かれば概略的に固有振動数が分かる
  - 精度の保証は難しい

4

Rayleigh-Ritz法

- 汎関数として $I = U - \omega^2 T$
- 近似関数として $u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$
  - 近似関数は境界条件を満たす

$$I = U - \omega^2 T$$

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

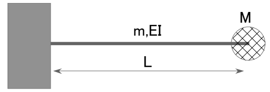
$$I\left(u_{app}\right) = U\left(u_{app}\right) - \omega^2 T\left(u_{app}\right)$$

$$\frac{\partial I\left(u_{app}\right)}{\partial a_j} = \frac{\partial U\left(u_{app}\right)}{\partial a_j} - \omega^2 \frac{\partial T\left(u_{app}\right)}{\partial a_j} = 0$$

5

例題：先端におもりをつけた片持ち梁の振動

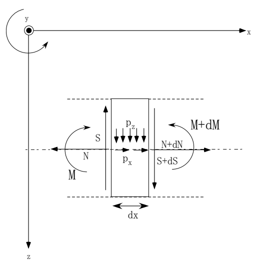
- 左端が埋め込みの片持ち梁，梁の長さはL，単位長さあたり質量はm，曲げ剛性はEI,先端におもりの質量はWとする
- 厳密解が容易に求まる
  - その１：m＝０のとき
  - その２：M＝０のとき
- 現実的にはこうならざるを得ない
  - その３：m≠０のとき



6

力のつり合い式

- 微小部分に関する外力と断面力のつり合い
  - x 方向、 z 方向
  - 微小部分中央周りのつり合い



$$\sum F_x = \left(N + dN\right) - N + p_x dx = 0$$

$$dN + p_x dx = 0$$

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$$

$$\sum F_z = \left(S + dS\right) - S + p_z dx = 0$$

$$dS + p_z dx = 0$$

$$\frac{dS}{dx} + p_z = 0$$

$$\sum M_{at\ center} = \left(M + dM\right) - M - \left(S + dS\right)\frac{dx}{2} - S\frac{dx}{2} = 0$$

$$dM - Sdx - dS\frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} \approx S$$

7

まとめ　中立軸を軸線とすれば

- 伸縮、曲げの関係を使い分けることができる

	伸縮問題（柱）	曲げ問題（梁）
ひずみ変位	$e = \frac{du}{dx}$	$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$
応力ひずみ	$N = EAe$	$M = EI_y \kappa$
つり合い式	$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$	$\frac{dS}{dx} + p_z = 0$ $\frac{dM}{dx} - S = 0$

8

梁では？

- せん断力レベルでの慣性力との釣り合い
  - ダランベールの原理を適用

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

- 曲げ剛性EI,単位長さあたり重量wは均一を仮定

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0$$

$$w=Y(x)q(t)=Y(x)A\exp(i\omega t)$$

$$\left(-m\omega^2 Y+EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}\right)q=0$$

$$\lambda^4 \triangleq \frac{m}{EI}\omega^2 \quad \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{EI}{m}}\lambda^2$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2},\quad \cosh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2}$$

9

境界条件でCを決める

- 要な境界条件は4つ→自明なものが良い
  - 二個変位（Y=0）ともう二個曲げモーメント（2階微分がゼロ）とかせん断力（3階微分がゼロ），
  - 四つ変位とか
- 例えば，スパンLの
  - 単純梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\; Y''\big|_{at\,x=0}=Y''\big|_{at\,x=L}=0$$

  - 片持ち梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=0}=0,\; Y''\big|_{at\,x=L}=Y'''\big|_{at\,x=L}=0$$

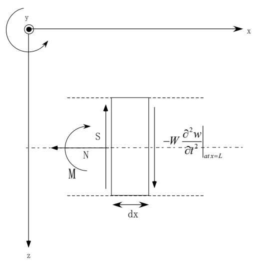
  - 両端埋め込み梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\; Y'\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=L}=0$$

10

この場合の境界条件

- 片持ち梁
- 変位wで表現



$$w\big|_{at\,x=0}=\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{at\,x=0}=0,\;\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$-S-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial M}{\partial x}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$\rightarrow EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

11

その１：ｍ＝０のとき

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0$$

$$w=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3\right)q(t)$$

$$=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3\right)\exp(i\omega t)$$

$$w\big|_{at\,x=0}=\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{at\,x=0}=0,\;\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$w\big|_{at\,x=0}=\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{at\,x=0}=0\rightarrow C_1=C_2=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{at\,x=L}=0\rightarrow 2C_3+6C_4L=0$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0\rightarrow$$

$$6C_4EI+W\omega^2\left(C_3L^2+C_4L^3\right)=0$$

$$3EI-W\omega^2L^3=0$$

$$\omega^2=\frac{3EI}{WL^3}$$

12

その２：M＝０のとき

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0$$
$$w=Y(x)q(t)=Y(x)A\exp(i\omega t)$$
$$\left(-m\omega^2 Y+EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}\right)q=0$$
$$\lambda^4 \triangleq \frac{m}{EI}\omega^2 \quad \to \omega=\sqrt{\frac{EI}{m}}\lambda^2$$
$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$
$$\sinh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2},\quad \cosh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2}$$
$$Y\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=0}=0,$$
$$Y\big|_{at\,x=0}=C_2+C_4=0$$
$$Y'\big|_{at\,x=0}=\lambda\left(C_1+C_3\right)=0$$
$$Y''\big|_{at\,x=L}=\lambda^2\left(-C_1\sin(\lambda L)-C_2\cos(\lambda L)+C_3\sinh(\lambda L)+C_4\cosh(\lambda L)\right)=0$$
$$Y'''\big|_{at\,x=L}=\lambda^3\left(-C_1\cos(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\cosh(\lambda L)+C_4\sinh(\lambda L)\right)=0$$

13

その３：M≠０，m≠０のとき

- その２の展開で境界条件の最後の式がダランベールの原理

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0$$
$$w=Y(x)q(t)=Y(x)A\exp(i\omega t)$$
$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$
$$Y'''\big|_{at\,x=L}=\lambda^3\left(-C_1\cos(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\cosh(\lambda L)+C_4\sinh(\lambda L)\right)=0$$
$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0\to$$
$$EI\left(-C_1\cos(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\cosh(\lambda L)+C_4\sinh(\lambda L)\right)$$
$$+W\omega^2\left(C_1\sin(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\sinh(\lambda L)+C_4\cosh(\lambda L)\right)=0$$

14

近似解法で解くとすると

- 梁の曲げによるひずみエネルギー $U=\int\frac{M^2}{2EI}dx$
- 質点群の運動エネルギー $T=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{1}{2}m\left(A\omega\right)^2$

Rayleigh method

$$w\approx\frac{A}{L^2}x^2\exp\left(i\omega t\right)\to M=-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-2EI\frac{A}{L^2}\exp\left(i\omega t\right)$$
$$U=\int\frac{M^2}{2EI}dx=2EI\frac{A^2}{L^3}\exp^2\left(i\omega t\right)$$
$$U_0=2EI\frac{A^2}{L^3}$$

No1

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{A}{L^2}x^2 i\omega\exp\left(i\omega t\right)$$
$$T=-\frac{W}{2}\omega^2A^2\exp^2\left(i\omega t\right)$$
$$T_0=\frac{W}{2}\omega^2A^2$$
$$T_0=U_0$$
$$\omega^2=\frac{\frac{2EI}{L^3}}{\frac{W}{2}}=\frac{4EI}{WL^3}$$

Rayleigh method

$$w\approx\frac{A}{L^2}x^2\exp\left(i\omega t\right)\to M=-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-2EI\frac{A}{L^2}\exp\left(i\omega t\right)$$
$$U=\int\frac{M^2}{2EI}dx=2EI\frac{A^2}{L^3}\exp^2\left(i\omega t\right)$$
$$U_0=2EI\frac{A^2}{L^3}$$

No3

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{A}{L^2}x^2 i\omega\exp\left(i\omega t\right)$$
$$T=-\frac{W}{2}\omega^2A^2\exp^2\left(i\omega t\right)+\int\frac{m}{2}\left(\frac{A}{L^2}x^2 i\omega\exp\left(i\omega t\right)\right)^2dx$$
$$=-\omega^2A^2\exp^2\left(i\omega t\right)\left(\frac{W}{2}+\frac{m}{2}\frac{L}{5}\right)$$
$$T_0=\left(\frac{W}{2}+\frac{mL}{10}\right)\omega^2A^2$$
$$T_0=U_0$$
$$\omega^2=\frac{\frac{2EI}{L^3}}{\left(\frac{W}{2}+\frac{mL}{10}\right)}$$

15

重み付き残渣法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$
$$R\left(u_{app}\right)=L\left[u_{app}\right]\ \leftarrow\ S\left[u_{app}\right]=0$$

- 運動方程式に近似解を適用した残渣を最小化する
  - 厳密解だったら残渣はゼロ
  - 近似解であっても（であるから）
    - 必ず境界条件を満たすものを採用することがポイント
- 最小自乗法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$
$$\frac{\partial\int R\left(u_{app}\right)^2dx}{\partial a_j}=2\int R\left(u_{app}\right)\frac{\partial R\left(u_{app}\right)}{\partial a_j}dx=0\ \leftarrow\ S\left[u_{app}\right]=0$$

- ガラーキン法
  - 出所は汎関数の変分最小化

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$
$$\int R\left(u_{app}\right)\Psi_j dx=0\ \leftarrow\ S\left[u_{app}\right]=0$$

16

重み付き残渣法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$R\left(u_{app}\right)=L\left[u_{app}\right]\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

- 運動方程式に近似解を適用した残渣を最小化する
  - 厳密解だったら残渣はゼロ
  - 近似解であっても（であるから）
    - 必ず境界条件を満たすものを採用することがポイント
- 最小自乗法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$\frac{\partial\int R\left(u_{app}\right)^2 dx}{\partial a_j}=2\int R\left(u_{app}\right)\frac{\partial R\left(u_{app}\right)}{\partial a_j}dx=0\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

- ガラーキン法
  - 出所は汎関数の変分最小化

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$\int R\left(u_{app}\right)\Psi_j dx=0\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

17

先の例題に適用　m≠0,　W≠ 0

- 手順は理解しやすいが，計算の複雑さは避けられない

$$w_{app}\approx\sum_i C_i\psi_i q(t)\equiv\left(C_1x^4+C_2x^5\right)\exp\left(i\omega t\right)$$

BC

$$\left.w_{app}\right|_{at\,x=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial w_{app}}{\partial x}\right|_{at\,x=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_{app}}{\partial x^2}\right|_{at\,x=L}=0$$

$$\left.EI\frac{\partial^3 w_{app}}{\partial x^3}\right|_{at\,x=L}=\left.W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{at\,x=L}$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$R=\left(m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)$$

$$\text{LS}\Rightarrow 0=\frac{\partial\left(\int R^2dx\right)}{\partial C_i}$$

$$\text{Galerkin}\Rightarrow 0=\int R\psi_i dx$$

18

部分積分

$$\frac{duv}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$$

$$\int\frac{du}{dx}vdx=[uv]-\int u\frac{dv}{dx}dx$$

- 部分積分を思い出してもらいます

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$R(w)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$w\triangleq\sum_i C_i\psi_i q(t)=\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{dw}{dx}=\left(\sum_i C_i\frac{d\psi_i}{dx}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\left(\sum_i C_i\frac{d^2\psi_i}{dx^2}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^{(n)}w}{dx^{(n)}}=\left(\sum_i C_i\frac{d^{(n)}\psi_i}{dx^{(n)}}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\int R(w)\psi_i dx=0$$

$$\int\left(m\frac{\partial^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)}{\partial x^2}\right)\right)\psi_i dx=0$$

$$\int\left(-m\omega^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)+EI\frac{d^4\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^4}\right)\psi_i dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\int\left(EI\frac{d^4\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^4}\right)\psi_i dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\int\left(EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\right)\frac{d\psi_i}{dx}dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]+\int\left(EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=0$$

境界条件のせん断力項

境界条件の曲げモーメント項

19

具体的に

$$w\triangleq C_1x^2\exp\left(i\omega t\right)$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1x^2x^2dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+\int_0^L\left(EI2C_1\right)2dx=0$$

$$C_1\left(\frac{-m\omega^2}{5}L^5+4EIL\right)=0$$

$$\omega^2=\frac{20EI}{mL^4}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{20EI}{mL^4}}\approx 4.47\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$w\triangleq C_1\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\exp\left(i\omega t\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=C_1\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp\left(i\omega t\right)$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\int_0^L\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx=0$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2}\right)dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\int_0^L\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2}dx=0$$

$$C_1\left(-m\omega^2\left(L-2\left(\frac{2L}{\pi}\right)+\frac{L}{2}\right)+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\frac{L}{2}\right)=0$$

$$\omega^2=\frac{\left(\frac{\pi^4}{32}\right)EI}{\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)mL^4}\Rightarrow\omega\approx 3.66\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

厳密解

$$\omega=3.52\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

20

先端の質点がWだったら、境界条件のせん断力を調整し

$$w\big|_{at\,x=0}=\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{at\,x=0}=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$-S-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial M}{\partial x}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$\rightarrow EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{at\,x=L}+\omega^2 WC_1\exp(i\omega t)=0$$

$$w\triangleq C_1\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=C_1\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)dx+$$

$$\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\int_0^L\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx=0$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2}\right)dx+$$

$$\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\int_0^L\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2}dx=0$$

$$C_1\left(-m\omega^2\left(L-2\left(\frac{2L}{\pi}\right)+\frac{L}{2}\right)-\omega^2W+EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4\frac{L}{2}\right)=0$$

$$\omega^2=\frac{\left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right)EI}{\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)mL+W}$$

$$\mathrm{m}\rightarrow 0\quad \omega^2\approx\frac{3.044EI}{WL^3}$$

21

例題:両端埋め込み梁に適用

- スパンはL，分布質量はｍとすれば

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

- 近似関数は

$$w\triangleq C_1\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=C_1\left(\frac{2\pi}{L}\right)\sin\frac{2\pi x}{L}\exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=C_1\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{L}\exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-C_1\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3\sin\frac{2\pi x}{L}\exp(i\omega t)$$

22

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]+\int\left(EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=0$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-2\cos\frac{2\pi x}{L}+\cos^2\frac{2\pi x}{L}\right)dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EI\left(C_1\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)^2\int_0^L\cos^2\frac{2\pi x}{L}xdx=0$$

$$-m\omega^2\int_0^L C_1\left(1-2\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{1+\cos 4\frac{\pi x}{L}}{2}\right)dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]_0^L-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]_0^L+EIC_1\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)^2\int_0^L\frac{1+\cos 4\frac{\pi x}{L}}{2}dx=0$$

$$C_1\left(\frac{-m\omega^2 3}{2}L+EI\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4\frac{L}{2}\right)=0$$

$$\omega^2=\frac{EI}{3m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4\Rightarrow\omega=22.79\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

厳密解

$$\omega=\frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}=22.4\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

23

時間領域の追跡

- 種々の方法が提案されており目的に応じて使い分ける
- 比較的一般的
  - オイラー法
  - 修正オイラー法（２次のルンゲクッタ法）
  - ルンゲクッタ法
- 偏微分方程式の時
  - クランクニコルソン法　ルンゲクッタ法に類似
- 振動の運動方程式
  - 線形加速度法
  - ニューマークのベータ法
  - ウィルソンのシータ法

24

簡単にオイラー法

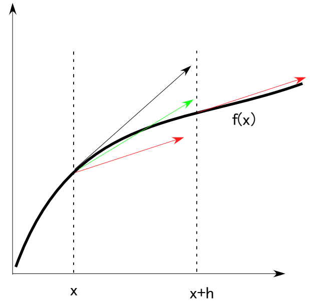
- 関数をテイラー展開

$$f(x+h)=f(x)+f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\cdots$$

$$O(h^2)\sim \mathrm{negl}$$

$$f(x+h)\approx f(x)+f^{(1)}(x)h$$

- 黒矢印で順次推定がオイラー法
- x + h の傾きを使って推定精度を向上させる仕組みが修正オイラー法



25

線形加速度法

- 区間の加速度変化は一定とする
- 振動に特化
- 解き方
  - tの変位、速度，加速度は分かっているとし，
  - t+hの運動方程式と右の関係からまず加速度を解き，
  - 速度，変位を推定する
- B = 1 / 6 の時ニューマークの β 法と一致

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)=\frac{d^2f}{dt^2}(t)+\alpha h$$

$$\frac{df}{dt}(t+h)=\frac{df}{dt}(t)+\frac{d^2f}{dt^2}(t)h+\frac{\alpha}{2}h^2$$

$$=\frac{df}{dt}(t)+\frac{d^2f}{dt^2}(t)h+\frac{\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)-\frac{d^2f}{dt^2}(t)}{2}h$$

$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2}+\frac{\alpha}{6}h^3$$

$$=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2}+\frac{\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)-\frac{d^2f}{dt^2}(t)}{6}h^2$$

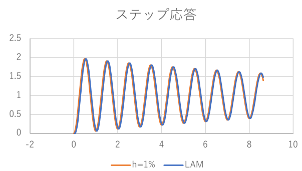
$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{3}+\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

Newmark β

$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\frac{d^2f}{dt^2}(t)h^2+\beta\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)h^2$$

26

わかりにくいので線形加速度法でもう少し展開



$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f$$

$$\ddot{u}=\frac{f}{m}-2\zeta\omega_0\dot{u}-\omega_0{}^2u$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-\omega_0{}^2u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h)=\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h$$

$$u(t+h)=u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}+\ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-\omega_0{}^2u(t+h)$$

$$=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h\right)-\omega_0{}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}+\ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6}\right)$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t)}{2}h\right)-\omega_0{}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}\right)}{\left(1+\zeta h\omega_0+\frac{h^2}{6}\omega_0{}^2\right)}$$

27

Newmarkの β 法でも係数が少し変わるだけ

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f$$

$$\ddot{u}=\frac{f}{m}-2\zeta\omega_0\dot{u}-\omega_0{}^2u$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-\omega_0{}^2u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h)=\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h$$

$$u(t+h)=u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2+\beta\ddot{u}(t+h)h^2$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-\omega_0{}^2u(t+h)$$

$$=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h\right)-\omega_0{}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2+\beta\ddot{u}(t+h)h^2\right)$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t)}{2}h\right)-\omega_0{}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{u}(t)h^2\right)}{\left(1+\zeta h\omega_0+\beta h^2\omega_0{}^2\right)}$$

28

非線形性を導入した解析

- 時系列解析ならば
  - 時間に応じた変位関係の状況を反映した剛性関係を導入できる
  - Updated
- それでも振動モード形を求めたときがある
  - 接線剛性法
  - 反力－変位の関係の接線（剛性）を利用する

29

課題

- 近似解法で手を動かして解いてみよう
- 弦の場合で適用してみよう
- 諸元はお任せ

30