不規則振動への拡張

設計論で荷重化の議論エッセンス

1

必要となる確率過程，統計の知識

- 集合
  - 集合
  - 平均，分散
  - 自己相関関数
- エルゴード性
- 定常
  - 狭義の定常
  - 広義の定常
- パワースペクトル
- フーリエスペクトル

2

複数の試行の時系列・確率過程

- 同じ条件で何度も繰り返す
- 不確実性によってきまる実験や観測などを試行(trial)
- 試行の結果起こる事柄を事象(event)
  - 事象のまとまりを集合（set, ensembleアンサンブル）
- 確率過程（stochastic process）
  - 時間とともに変化する確率変数

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \bullet \\ x_i(t) \\ \bullet \\ x_n(t) \end{Bmatrix}$$

3

平均とか，モーメント

- 平均とｎ次モーメント

アンサンブル平均

$$\langle x(t) \rangle = E(x(t)) = \frac{1}{N}\sum_i x_i(t)$$

aに関するn次モーメント $\langle (x-a)^n \rangle = E((x-a)^n)$

時間平均

$$\overline{x_i} = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty} x_i(t)$$

- 時間平均とアンサンブル平均が時間変化しな
  - ２次モーメントまで時間変化しない場合
    - （広義の，弱い）定常過程
    - より高次モーメントまで一致して，定常過程

4

エルゴード性

- 時間平均とアンサンブル平均が一致
  - 高次モーメントも
- エルゴード性が仮定できれば，時間平均とアンサンブル平均は可逆的
- 定常過程と誤解しやすい

$$\left\langle x(t)^n \right\rangle = E\left(x(t)^n\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^n\, dt = \overline{x(t)^n}$$

$$mean\, x(t) = \left\langle x(t) \right\rangle = E\left(x(t)\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \overline{x(t)}$$

$$\operatorname{var} x(t) = \left\langle \left(x(t) - \overline{x(t)}\right)^2 \right\rangle = E\left(\left(x(t) - \overline{x(t)}\right)^2\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^2\, dt = \overline{x(t)^2} - \overline{x(t)}^2$$

5

自己相関関数

- モーメント関数の内の一つ
- 弱定常，エルゴード性が仮定できるとして
- 信号の周期性を表現できる

$$R_{xx}(\tau) = \left\langle \left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right) \right\rangle$$
$$= E\left(\left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right) dt$$

6

パワースペクトル密度関数:　PSD

- パワースペクトル密度関数
  - パワー
    - → 信号の自乗
  - スペクトル密度
    - → 周波数分布
- PSD：エネルギー分布を示すもの
  - 二次モーメントの周波数分布
  - ウィーナー＝ヒンチンの定理（Wiener–Khinchin theorem）
- PSDもRも原点対象

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T}^{T} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt$$

$$PSD(\omega) = S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left\langle |F|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^* \right\rangle$$

$$Wiener - Khinchintheorem$$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau)\exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\, dt \exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^* \right\rangle$$

7

１自由度系からの応用

- 単位ステップ外力による応答
- →微分して単位衝撃応答
- →外力時系列が分かれば
  - 単位衝撃応答と外力時系列の積の畳み込み積分
- フーリエ変換を利用すると
- →動的応答倍率を介して，外力と応答のフーリエ変換が関係づけられる
- →応答のパワースペクトル密度関数が得られる
- １自由度系の応答は，低減衰とすると（普通は当てはまる），固有振動数付近の周波数帯にパワーが集中する狭帯域ガウス過程
  - 包絡線がレイリー分布
  - 最大値の期待値の推定に使われる

8

単位の外力

$t>0$

- 単位＝１の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
  - 線形だったら応答は大きさ倍

$$x_{unit\,step}(t)=-\frac{1}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t)+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right)+\frac{1}{k}$$

$$x_{unit\,impulse}(t)=\frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}}\left(\left(1+h^2\right)\omega_o\sin(\omega_D t)-h\omega_D\cos(\omega_D t)\right)$$

- ある時刻の外力の連続
  - 応答の重ね合わせ

$$f(t)=\{\cdots,f(t_n),\cdots\}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t)=\sum_i f(t_i)\,x_{unit\,impulse}(t-t_i)$$

$$=\int_{-\infty}^{t} f(T)\,x_{unit\,impulse}(t-T)\,dT$$

9

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分　convolution

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(T)\,x_{unit\,impulse}(t-T)\,dT$$

- これをフーリエ変換，Tと t －Tで別々に変換することができて

$$U(\omega)=F(\omega)X_{unit\,impulse}(\omega)$$

$$X(\omega_e)=\frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

$$X_{unit\,impulse}(\omega)=\frac{1}{k}H(\omega_e)$$

$$\langle\langle U(\omega)U^*(\omega)\rangle\rangle=\langle\langle F(\omega)F^*(\omega)\rangle\rangle\frac{1}{k}H(\omega_e)\frac{1}{k}H^*(\omega_e)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\langle U(\omega)U^*(\omega)\rangle\rangle}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\langle F(\omega)F^*(\omega)\rangle\rangle}{T}\frac{1}{k^2}H(\omega_e)H^*(\omega_e)$$

$$S_U(\omega)=S_F(\omega)\frac{1}{k^2}\left|H(\omega_e)\right|^2$$

- 不規則外力とするとFは不確定，確率量，Xはシステムで決まる決定的な量
  - 確率的な扱い
  - 結果的にUも確率的な扱いが必要

10

課題

- まとめてください
  - 定常
  - エルゴード性

11