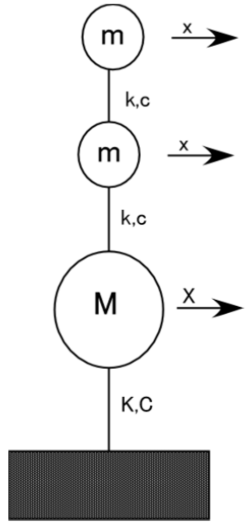
分布質量系， 多自由度系への拡張

分布質量系
多自由度系



- 分布質量系
  - 構造特性に分布がある
    - 基本構造なら梁とか弦とか,
    - 一般の構造物
- 多自由度系
  - 自由度が多い系の話し
  - 代表的な動きで離散化
  - 有限要素モデル

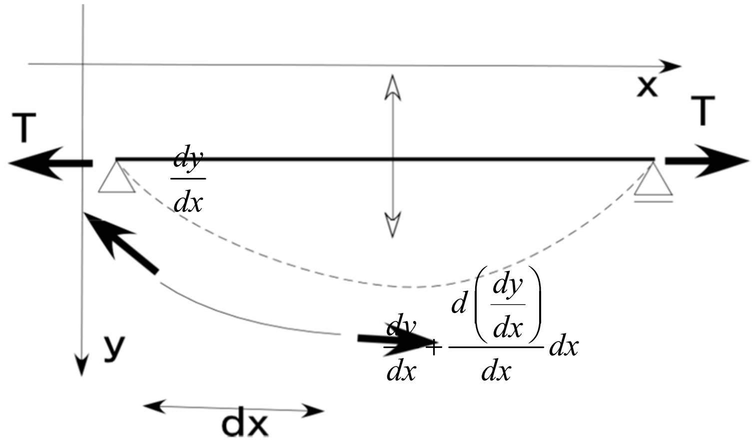
手を動かして、解けるものが、
弦と梁しかない
まずは、例題として「弦」

まずは，弦から

- 弦は張力の構造　教科書２．６．３
- 微少変形
  - 弦は伸びない　不伸張　張力変化はない
  - 運動に伴う傾きによる，運動方向への分力が反力
- 運動方程式はダランベールの原理を適用すると
- ρは単位長さあたりの弦の質量
- 減衰は話しが複雑になるのでｈ＝０を設定し，減衰項はなし

$$-\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left(-T\frac{\partial y}{\partial x}+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}dx\right)\right)=0$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



変位 y は位置 x と時間の関数

- 変位 y が位置と時間の2独立変数を持つ関数なので, 偏微分になっている
- 教科書とおりといても良いが、**変数分離型の解法**戦略を考える

$$y = Y(x)\,q(t)$$

いつものように

$$q(t) \triangleq A \bullet \exp(i\omega t)$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho Y \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = Tq \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$-\rho Y \omega^2 A \bullet \exp(i\omega t) = T \frac{d^2 Y}{dx^2} A \bullet \exp(i\omega t)$$

$$\left(\rho\omega^2 Y + T \frac{d^2 Y}{dx^2}\right) q = 0$$

$$\left(\rho\omega^2 Y + T \frac{d^2 Y}{dx^2}\right) \equiv 0 \quad \because q \neq 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

天下り的な正弦波状形状関数の解というわけではない

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho Y \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = Tq \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$-\rho Y \omega^2 A \bullet \exp\left(i\omega t\right) = T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} A \bullet \exp\left(i\omega t\right)$$

$$\left(\rho\omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) q = 0$$

$$\left(\rho\omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \equiv 0 \quad \because q \neq 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

- 細かくは

$$\left(\rho\omega^2 Y + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \equiv 0 \quad \because q \neq 0$$

$Y = C \exp(\Lambda x)$ として

$$\Lambda = \pm i\lambda \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

$$Y = C_1 \exp(i\lambda x) + C_2 \exp(-i\lambda x)$$

$$= (C_1 + C_2)\cos(\lambda x) + i(C_1 - C_2)\sin(\lambda x)$$

$$\Rightarrow C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

形状を決めるための境界条件を適用

- 境界条件は弦の長さがLとすると

$$Y\big|_{at\,x=0} = Y\big|_{at\,x=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \because \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

$$Y\big|_{at\,x=0} = C_2 = 0$$

両端は留まっている

$$Y\big|_{at\,x=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = C_1 \sin(\lambda L) = 0$$

$$\lambda L = n\pi \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

$$Y_n = C_{1,n} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{T}} \Rightarrow \;\; \omega_n = \lambda_n\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- 斉次解→

$$y = \sum_{j=1} y_j = \sum_{j=1} A_j \sin(\frac{j\pi}{L} x)\exp(i\omega_j t)$$

次に

例題として、「梁」

梁では？構造力学を思い出して

- せん断力レベルでの慣性力との釣り合い
  - ダランベールの原理を適用

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0$$

- 曲げ剛性EI,単位長さあたり重量wは均一を仮定

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$

$$y=Y(x)q(t)=Y(x)A\exp(i\omega t)$$

$$\left(-\frac{w}{g}\omega^2 Y+EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}\right)q=0$$

$$\lambda^4 \triangleq \frac{w}{gEI}\omega^2 \quad \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{gEI}{w}}\lambda^2$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2},\quad \cosh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2}$$

境界条件で未定定数Cを決める

- 要な境界条件は4つ→自明なものが良い
  - 二個変位（Y=0）ともう二個曲げモーメント（2階微分がゼロ）とかせん断力（3階微分がゼロ），
  - 四つ変位とか
- 例えば，スパンLの
  - 単純梁

$$Y\Big|_{at\,x=0} = Y\Big|_{at\,x=L} = 0,\ \ Y''\Big|_{at\,x=0} = Y''\Big|_{at\,x=L} = 0$$

  - 片持ち梁

$$Y\Big|_{at\,x=0} = Y'\Big|_{at\,x=0} = 0,\ \ Y''\Big|_{at\,x=L} = Y'''\Big|_{at\,x=L} = 0$$

  - 両端埋め込み梁

$$Y\Big|_{at\,x=0} = Y\Big|_{at\,x=L} = 0,\ \ Y'\Big|_{at\,x=0} = Y'\Big|_{at\,x=L} = 0$$

単純梁の場合

$$Y\big|_{at\,x=0} = Y\big|_{at\,x=L} = 0,\ \ Y''\big|_{at\,x=0} = Y''\big|_{at\,x=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$Y\big|_{at\,x=0} = C_2 + C_4 = 0$$

$$Y\big|_{at\,x=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$Y''\big|_{at\,x=0} = -\lambda^2 C_2 + \lambda^2 C_4 = 0$$

$$Y''\big|_{at\,x=L} = -\lambda^2 C_1 \sin(\lambda L) - \lambda^2 C_2 \cos(\lambda L) + \lambda^2 C_3 \sinh(\lambda L) + \lambda^2 C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{gEI}{w}}\lambda_j^{\,2} = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{w}}$$

$$y = \sum_j A_j \sin(\frac{j\pi}{L} x) \exp(i\omega_j t)$$

両端埋め込み梁だったら

$$Y\Big|_{at\,x=0} = Y\Big|_{at\,x=L} = 0,\ \ Y'\Big|_{at\,x=0} = Y'\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$Y\Big|_{at\,x=0} = C_2 + C_4 = 0$$

$$Y\Big|_{at\,x=L} = C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L) = 0$$

$$Y'\Big|_{at\,x=0} = \lambda C_1 + \lambda C_3 = 0$$

$$Y'\Big|_{at\,x=L} = \lambda C_1 \cos(\lambda L) - \lambda C_2 \sin(\lambda L) + \lambda C_3 \cosh(\lambda L) + \lambda C_4 \sinh(\lambda L) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \cos(\lambda L) & -\sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0$$

- 係数側の行列式=0でとけるけど，大変

ここまでは斉次解

- 外力がある場合の流れ
  - 斉次解を求め，振動モードごとに分解
  - モーダルアナリシスに持ち込む
  - 振動モードごとの特性を決め
    - 一般化質量
    - 一般化剛性
    - 一般化外力
    - 固有振動数
  - 一自由度系の時に学んだ特異解に持ち込む

課題

- 分布質量系で
  - 一般化質量
  - 一般化剛性
  - 一般化外力
  - 固有振動数
- について、まとめてみよう