構造動力学

第４回の２

不規則な外力応答への拡張

- 外力は調和的な場合に限らない
  - 繰り返しが続くような場合
    - 不規則ではあるけど、ある程度の規則性を持って繰り返す
    - 「定常」として統計的な扱いができる
  - 雑多な交通で見られるような不規則な外力
  - 繰り返しは期待できない $\frac{du_{step}}{dx}$
    - 統計的な扱いは困難
  - 衝突のようなショック
    - まずは、ステップ、衝撃の応答例から
  - 単調な（単調ではなくても）増加、減少外力
- 不規則？
  - 正弦波のような調和的でないが、統計的な意味で「定常」

ステップ外力の意味

- 衝撃応答への拡張
- この問題は過渡応答
- 一般解をちゃんと解く

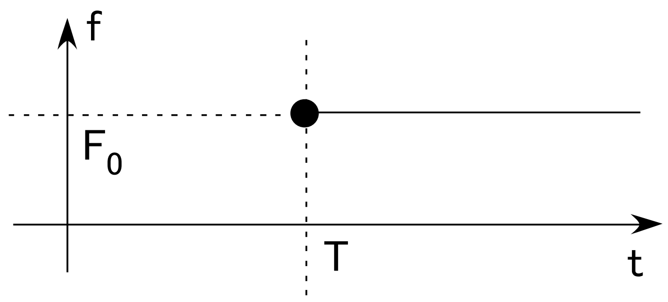
$$\int_{-\infty}^{t} f_{impulse} dt = f_{step}$$

$$\int_{-\infty}^{t} u_{impulse} dt = u_{step}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_{impulse} = \frac{df_{step}}{dx}$$

$$u_{impulse} = \frac{du_{step}}{dx}$$



ステップ外力

- 運動方程式的な展開

$$
\begin{aligned}
f(t-T) &= 0 \qquad t < T \\
&= F_e \qquad t \ge T \\
T &\doteq 0 \\
f(t) &= 0 \qquad t < 0 \\
&= F_e \qquad t \ge 0
\end{aligned}
$$

後者ｔ＞０の特異解
一般的には時間をTシフトした状況を考える

$$x_e = \frac{F_e}{k}$$

一般解

$$x = \exp(-h\omega t)\left(A_1 \exp(i\omega_o\sqrt{1-h^2}\ t) + A_2 \exp(-i\omega_o\sqrt{1-h^2}\ t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

ｔ＝０での整合条件（区間で言えば初期値）

$$x = \dot{x} = 0$$

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t)\left(A_1 \exp(i\omega_D\, t) + A_2 \exp(-i\omega_D\, t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

$$\because \quad \omega_D = \omega_o\sqrt{1-h^2}$$

$$x(t=0) = \left(A_1 + A_2\right) + \frac{F_e}{k} = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = -h\omega_o\left(A_1 + A_2\right) + \left(A_1 i\omega_D - A_2 i\omega_D\right) = 0$$

$$A_1\left(-h\omega_o + i\omega_D\right) = A_2\left(h\omega_o + i\omega_D\right)$$

$$A_1\frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{\left(h\omega_o + i\omega_D\right)} = A_2$$

$$
\begin{aligned}
&\left(A_1 + A_2\right) + \frac{F_e}{k} = 0 \\
&= \left(1 + \frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{\left(h\omega_o + i\omega_D\right)}\right)A_1 + \frac{F_e}{k} \\
&= \frac{i\omega_D}{\left(h\omega_o + i\omega_D\right)}A_1 + \frac{F_e}{k}
\end{aligned}
$$

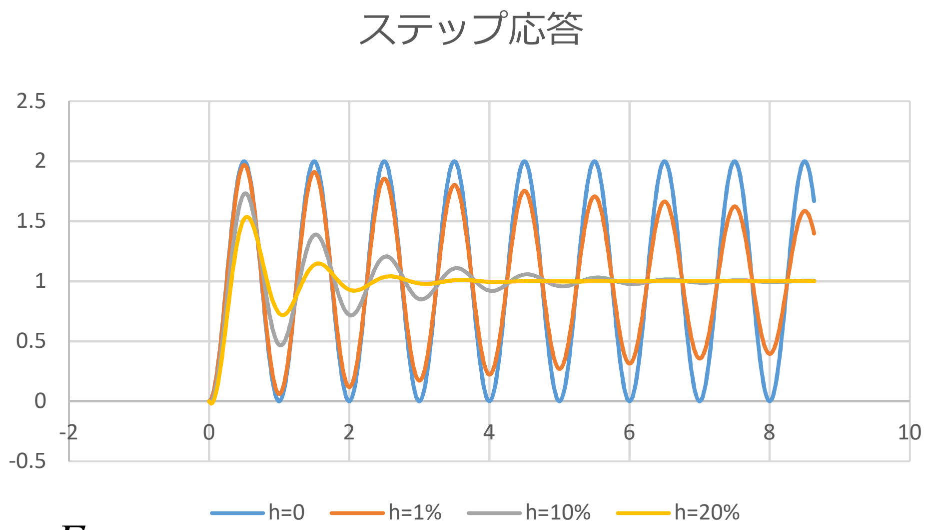
$$A_1 = -\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D}$$

$$A_2 = A_1\frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{\left(h\omega_o + i\omega_D\right)} = -\frac{F_e}{k}\frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{i\omega_D}$$

$$A_1 + A_2 = -\frac{F_e}{k}$$

$$A_1 - A_2 = -\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D} + \frac{F_e}{k}\frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{i\omega_D} = -\frac{F_e}{k}\frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$

ステップ外力　つづき



$$x(t) = \exp(-h\omega_o t)\left(A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

$$\because \quad \omega_D = \omega_o \sqrt{1-h^2}$$

$$A_1 + A_2 = -\frac{F_e}{k}$$

$$A_1 - A_2 = -\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o + i\omega_D}{i\omega_D} + \frac{F_e}{k}\frac{\left(-h\omega_o + i\omega_D\right)}{i\omega_D} = -\frac{F_e}{k}\frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t)\left(A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

$$= \exp(-h\omega_o t)\left(\left(A_1 + A_2\right)\cos(\omega_D t) + \left(A_1 - A_2\right) i \sin(\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

$$= -\frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

衝撃応答

$$\omega_D = \omega_o \sqrt{1-h^2}$$

$$x_{step}(t) = -\frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

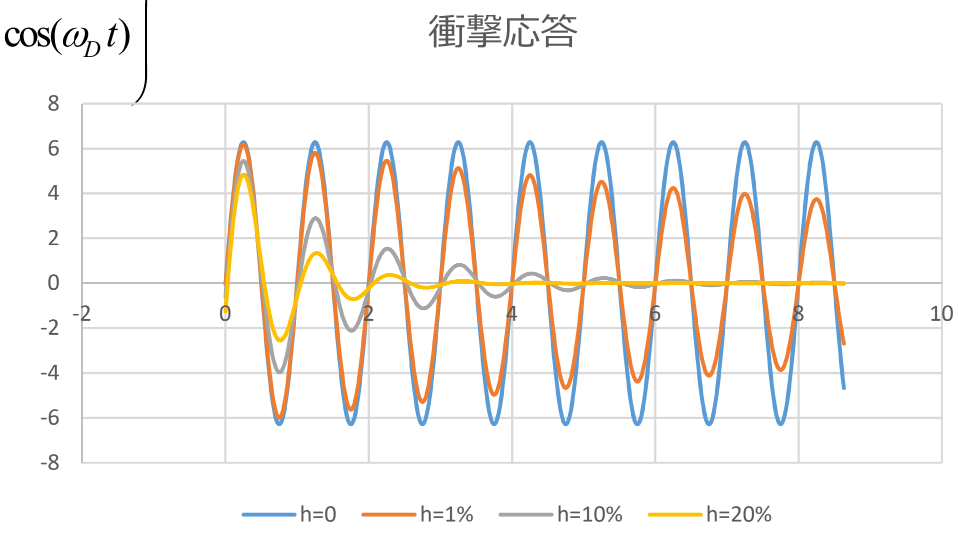
$$x_{impulse}(t) = \frac{dx_{step}(t)}{dt}$$

$$= \frac{h\omega_o F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) - \frac{\omega_D F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(-\sin(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\left(\frac{2hh\omega_o}{\sqrt{1-h^2}} + \omega_D\right)\sin(\omega_D t) + \left(h\omega_o - \frac{2h\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}\right)\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\left(\frac{2hh\omega_o + \omega_o\left(1-h^2\right)}{\sqrt{1-h^2}}\right)\sin(\omega_D t) + \left(h\omega_o - 2h\omega_o\right)\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\frac{\exp(-h\omega_o t)}{\sqrt{1-h^2}}\left(\left(1+h^2\right)\omega_o \sin(\omega_D t) - h\omega_D \cos(\omega_D t)\right)$$



単位の外力

$t > 0$

$$x_{unit\,step}(t) = -\frac{1}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{1}{k}$$

$$x_{unit\,impulse}(t) = \frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}}\left(\left(1+h^2\right)\omega_o \sin(\omega_D t) - h\omega_D \cos(\omega_D t)\right)$$

- 単位＝１の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
  - 線形だったら応答は大きさ倍

- ある時刻の外力の連続
  - 応答の重ね合わせ

$$f(t) = \left\{\cdots, f(t_n), \cdots\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \sum_i f(t_i)\, x_{unit\,impulse}(t - t_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(T)\, x_{unit\,impulse}(t - T)\, dT$$

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分　convolution

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} f\left(T\right) x_{unit\,impulse}\left(t-T\right) dT$$

- これをフーリエ変換，Tとｔ－Tで別々に変換することができて

$$U\left(\omega\right) = F\left(\omega\right) X_{unit\,impulse}\left(\omega\right)$$

$$X\left(\omega_e\right) = \frac{1}{k} H(\omega_e) F(\omega_e)$$

$$X_{unit\,impulse}\left(\omega\right) = \frac{1}{k} H(\omega_e)$$

$$\left\langle\left\langle U\left(\omega\right) U^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle F\left(\omega\right) F^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle \frac{1}{k} H(\omega_e) \frac{1}{k} H^*(\omega_e)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\left\langle\left\langle U\left(\omega\right) U^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\left\langle\left\langle F\left(\omega\right) F^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle}{T} \frac{1}{k^2} H(\omega_e) H^*(\omega_e)$$

$$S_U\left(\omega\right) = S_F\left(\omega\right) \frac{1}{k^2} \left|H(\omega_e)\right|^2$$

- 不規則外力とするとFは不確定，確率量，Xはシステムで決まる決定的な量
  - 確率的な扱い
  - 結果的にUも確率的な扱いが必要

課題

- 用語の意味をまとめよう
    - 統計的に「定常」
    - 不規則な外力の例
    - フーリエ変換