構造動力学

第４回

特異解を求める

- 外力項がある場合の解
- 非減衰系で
  - 正弦波状の外力
  - 基盤が正弦波状に動く　→地震にリンク
  - ステップ外力
- 減衰系で
  - 正弦波状の外力
  - 基盤が正弦波状に動く
  - ステップ外力

特異解に着目する理由

- 解の第一項は減衰する
  - δ=0.03で
    - 一波ごとに振幅３%減
    - 十波でおおむね30%減

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

- つまり↓の解で正減衰なら時間が経てば，特異解しか残らない
  - 時間が経たなければ，斉次解はもちろん重要

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t)\left(A_1 \exp(i\omega_D\, t) + A_2 \exp(-i\omega_D\, t)\right) + \text{特異解}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$= \frac{1}{N}\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+N}}\right)$$

$$\frac{A_n}{A_{n+N}} = \exp(N\delta) \approx 1 + N\delta + \frac{(N\delta)^2}{2!} + \cdots$$

質点への正弦波状外力に対する特異解

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$f(t) = F_o \exp(i\omega_e t)$$

$$x \equiv A \exp(i\omega_e t)$$

$$A \exp(i\omega_e t)\left(-m\omega_e{}^2 + ic\omega_e + k\right) = F_o \exp(i\omega_e t)$$

$$A = \frac{F_o}{\left(-m\omega_e{}^2 + ic\omega_e + k\right)} = \frac{F_o / k}{\left(1 - \left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \quad \because \frac{c}{k} = \frac{c}{m}\frac{m}{k} = \frac{2h\omega_o}{\omega_o{}^2} = \frac{2h}{\omega_o}$$

$$A = F_o / k \, \frac{1}{\left(1 - \left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} = F_o / k \, H(\omega_e)$$

$$\Updownarrow$$

$$X(\omega_e) = \frac{1}{k} H(\omega_e) F(\omega_e)$$

動的応答倍率

$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}=F_o/k\,H(\omega_e)$$

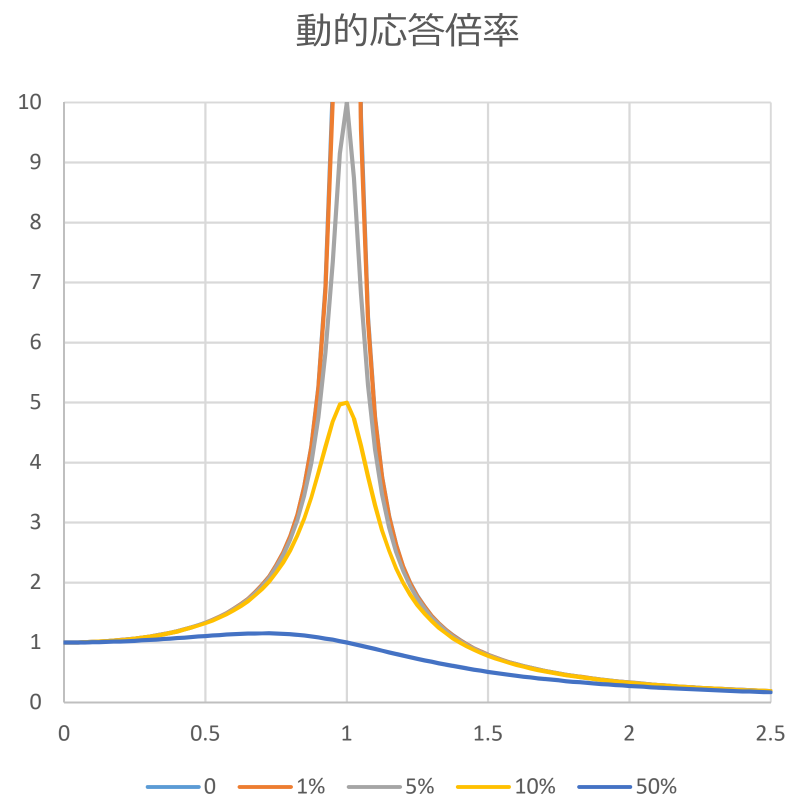
$$|A|=\frac{F_o/k}{\left|1-\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right|}$$

$$=F_o/k\sqrt{H(\omega_e)H^*(\omega_e)}=F_o/k\,|H(\omega_e)|$$

$$=\frac{F_o/k}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

$$\frac{|A|}{F_o/k}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\dfrac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

- 静的な変形に対する動的な効果



動的応答倍率Hの特徴

- 1から始まり無限大でゼロに漸近
- 外力振動数と固有振動数の一致
  - 共振
  - ピークは１／２ｈ
- フーリエ変換すると
  - 外力と応答の関係
  - Hは伝達関数と見なせる

$$x = A\exp(i\omega_e t)$$

$$= \frac{F_o / k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)$$

$$= \frac{1}{k}H(\omega_e)f(t)$$

$$X\left(\omega_e\right) = \frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

地盤振動の時の特異解

- 変位はまずは外部座標で考えると

$$u \equiv x + X$$

$$F_\alpha \Rightarrow -M(\ddot{x} + \ddot{X})$$

$$F_k = -Kx$$

$$F_D = -C\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{X}$$

$$f(t) \Rightarrow -M\ddot{X}$$

- 外部の絶対座標で
  - 地盤の変位X
  - 質点の変位u
- 地盤との相対変位ｘ

- 外力の振動数が大きいとき
  - 系の固有振動数が小さいとき
- 外部振動数が大きくなると
  - 相対変位のｘ→Xに漸近
    - 外部的には不動点になる
- 少しイメージしづらいが
- 内部座標的には、地盤の外部座標の動きがそのまま表現されるように見える
  - u=x+X → x =X
- 地震計の原理

地盤振動の時の特異解　続き

- 基盤から見た変位

$$X \equiv X_0 \exp(i\omega_e t)$$

$$f(t) = -M\ddot{X} = M\omega_e{}^2 X_0 \exp(i\omega_e t)$$

$$x = A\exp(i\omega_e t)$$

$$= \frac{M\omega_e{}^2 X_0 / k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \exp(i\omega_e t)$$

$$= \frac{X_0\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \exp(i\omega_e t)$$

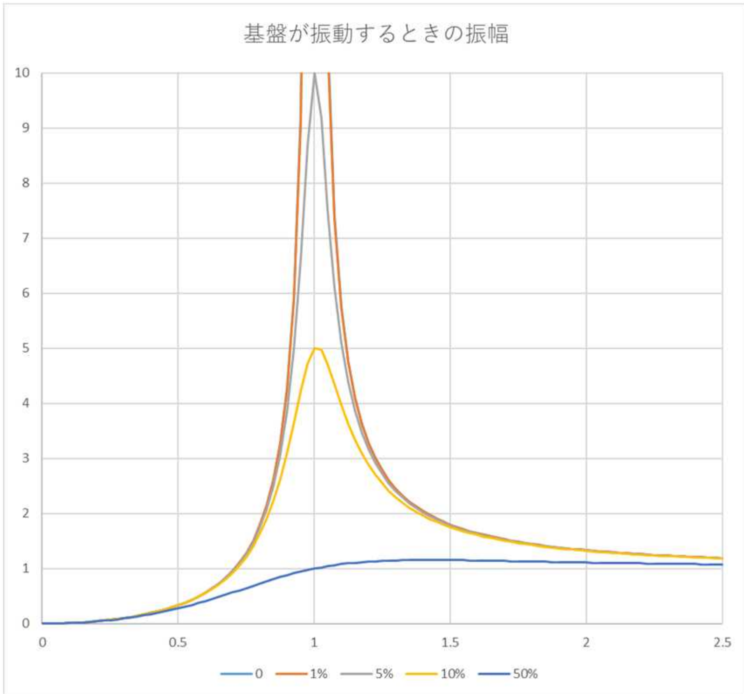
$$\left|\frac{x}{X}\right| = \left|\frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\right| = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + 4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

$$u = x + X$$

$$u = A\exp(i\omega_e t) + X$$

$$= \frac{X_0\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \exp(i\omega_e t) + X_0 \exp(i\omega_e t)$$

$$= X_0 \frac{1 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \exp(i\omega_e t)$$

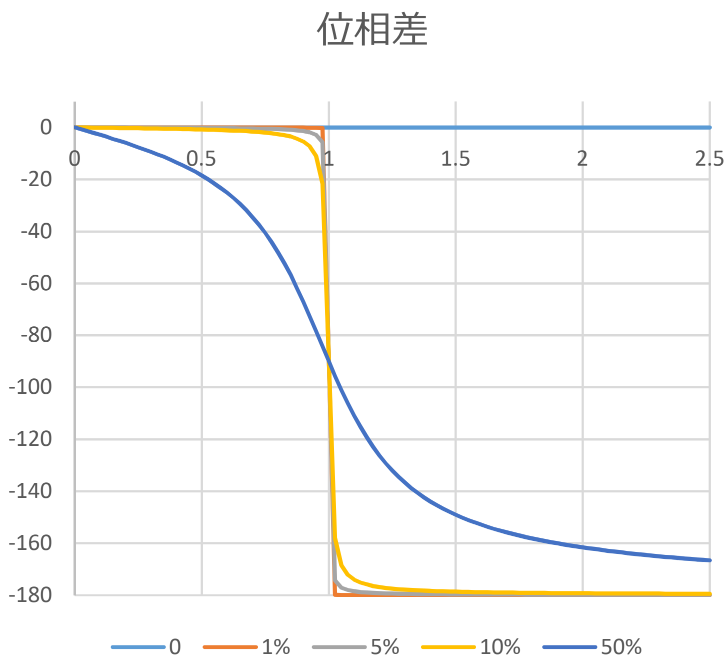


位相

- 外力と振動の間に位相差が生じる

$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$|A|=\frac{F_o/k}{\left|1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right|}=\frac{F_o/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$



$$A=F_o/k\,\frac{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$=F_o/k\,\frac{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+\left(2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)^2}$$

$$\arg(A)=\tan^{-1}\left(-\frac{2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)}{1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}\right)$$

課題

- 用語の意味をまとめよう
    - 動的応答倍率の特徴
    - 対数減衰率、減衰比
    - 動的応答倍率、位相