

近似解法による解析 時間領域の解析

近似解法

- 必ずしも容易に解を得られるわけではない
 - 近似解法を適用する提案が多い
 - 実用事例も多い
- 運動に関わるエネルギーを利用する場合
 - 一般には，運動方程式の汎関数が停留値を持つことを利用する場合
 - 変分原理の適用
 - 弾性力学では
 - 「エネルギー保存の原理」を使ったRayleigh法
 - 「ひずみエネルギーの最小原理」を使うRayleigh-Ritz法
 - 固有値，固有ベクトルを求めるなら，直感的で良い
- 運動方程式の残渣を最小にする場合
 - 重み付き残渣法
 - 残渣の自乗誤差を最小とする最小自乗法
 - 残渣を最小とする重み関数として近似関数を使うガラーキン法 (Galerkin法)
 - ある点を選んで誤差を最小とする選点法
 - たぶんこっちの方がわかりやすいし，適用も柔軟

まずは言葉から

- 運動方程式
 - 本体Lと境界条件S
- 汎関数
 - 運動（方程式）の基礎になるエネルギーの最小化
 - 要するに振動では運動エネルギーT, ポテンシャルエネルギーU, ひずみエネルギーを合わせた力学的エネルギーを示す関数
- 近似関数 u_{app}
 - ベクトル空間を表すので基底関数とも言う
- 誤差R

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \rightarrow L[u] = 0$$

$$u|_{at^{**}} = u_0 \rightarrow S[u] = 0 \text{ at}^{**}$$

$$I = U - \omega^2 T$$

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$R(u_{app}) = L[u_{app}] \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

Rayleigh法

- 「i次の固有振動で一周期の間の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの平均値は等しい」

$$\frac{P_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} T dt = \frac{P_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} U dt$$

- 基準座標 ($\cos(\omega t)$ とか) と運動形の概形が分かれば概略的に固有振動数が分かる
 - 精度の保証は難しい

Rayleigh-Ritz法

- 汎関数として
- 近似関数として
 - 近似関数は境界条件を満たす

$$I = U - \omega^2 T$$

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$I = U - \omega^2 T$$

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$I(u_{app}) = U(u_{app}) - \omega^2 T(u_{app})$$

$$\frac{\partial I(u_{app})}{\partial a_j} = \frac{\partial U(u_{app})}{\partial a_j} - \omega^2 \frac{\partial T(u_{app})}{\partial a_j} = 0$$

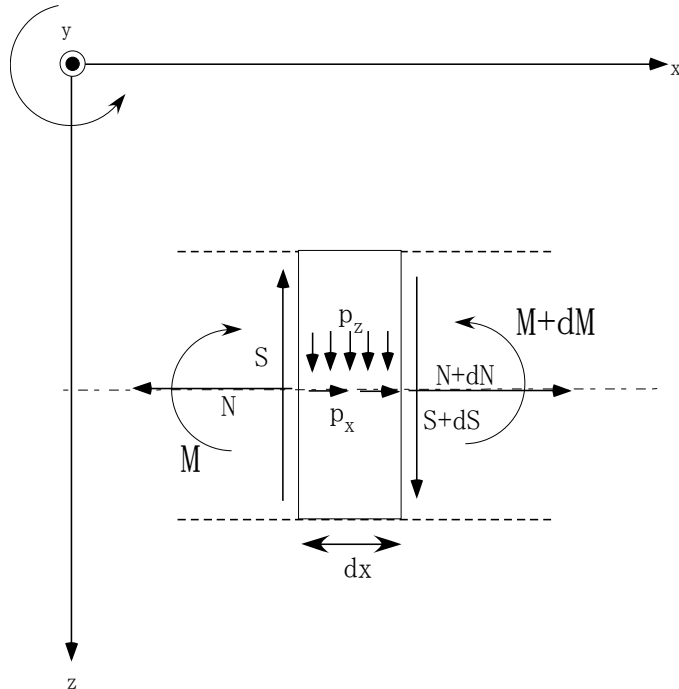
例題：先端におもりをつけた片持ち梁の振動

- 左端が埋め込みの片持ち梁，梁の長さは L ，単位長さあたり質量は m ，曲げ剛性は EI ，先端におもりの質量は M とする
- 厳密解が容易に求まる
 - その1： $m = 0$ のとき
 - その2： $M = 0$ のとき
- 現実的にはこうならざるを得ない
 - その3： $m \neq 0$ のとき



力のつり合い式

- 微小部分に関する外力と断面力のつり合い
 - x 方向、z 方向
 - 微小部分中央周りのつり合い



$$\sum F_x = (N + dN) - N + p_x dx = 0$$

$$dN + p_x dx = 0$$

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$$

$$\sum F_z = (S + dS) - S + p_z dx = 0$$

$$dS + p_z dx = 0$$

$$\frac{dS}{dx} + p_z = 0$$

$$\sum M_{at\ center} = (M + dM) - M - (S + dS) \frac{dx}{2} - S \frac{dx}{2} = 0$$

$$dM - S dx - dS \frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} \approx S$$

まとめ 中立軸を軸線とすれば

- 伸縮、曲げの係数を使い分けることができる

	伸縮問題(柱)	曲げ問題(梁)
ひずみ変位	$e = \frac{du}{dx}$	$\kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$
応力ひずみ	$N = EAe$	$M = EI_y\kappa$
つり合い式	$\frac{dN}{dx} + p_x = 0$	$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} + p_z &= 0 \\ \frac{dM}{dx} - S &= 0 \end{aligned}$

梁では？

- せん断カレレベルでの慣性力との釣り合い

- ダランベールの原理を適用

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

- 曲げ剛性EI, 単位長さあたり重量wは均一を仮定

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

$$w = Y(x)q(t) = Y(x)A \exp(i\omega t)$$

$$\left(-m\omega^2 Y + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \right) q = 0$$

$$\lambda^4 \triangleq \frac{m}{EI} \omega^2 \quad \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{EI}{m}} \lambda^2$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}, \quad \cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

境界条件でCを決める

- 要な境界条件は4つ→自明なものが良い
 - 二個変位 ($Y=0$) ともう二個曲げモーメント (2階微分がゼロ) とかせん断力 (3階微分がゼロ) ,
 - 四つ変位とか
- 例えば, スパンLの
 - 単純梁

$$Y|_{at x=0} = Y|_{at x=L} = 0, \quad Y''|_{at x=0} = Y''|_{at x=L} = 0$$

- 片持ち梁

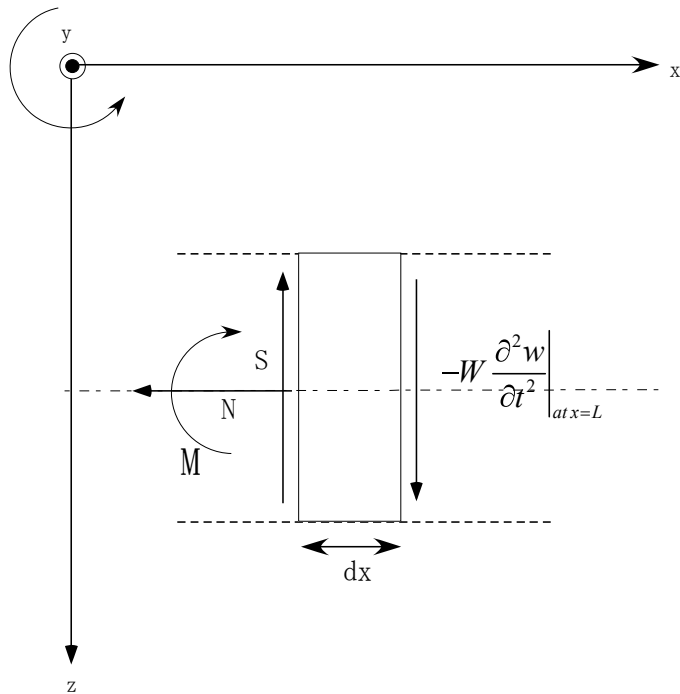
$$Y|_{at x=0} = Y'|_{at x=0} = 0, \quad Y''|_{at x=L} = Y'''|_{at x=L} = 0$$

- 両端埋め込み梁

$$Y|_{at x=0} = Y|_{at x=L} = 0, \quad Y'|_{at x=0} = Y'|_{at x=L} = 0$$

この場合の境界条件

- 片持ち梁
- 変位 w で表現



$$w \Big|_{at x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{at x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$-S - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial M}{\partial x} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$\rightarrow EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

その 1 : $m = 0$ のとき

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

$$\begin{aligned} w &= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) q(t) \\ &= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

$$w \Big|_{at x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{at x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$w \Big|_{at x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{at x=0} = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{at x=L} = 0 \rightarrow 2C_3 + 6C_4 L = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0 \rightarrow$$

$$6C_4 EI + W \omega^2 (C_3 L^2 + C_4 L^3) = 0$$

$$3EI - W \omega^2 L^3 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3EI}{WL^3}$$

その2 : M=0 のとき

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

$$w = Y(x)q(t) = Y(x)A \exp(i\omega t)$$

$$\left(-m\omega^2 Y + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \right) q = 0$$

$$\lambda^4 \triangleq \frac{m}{EI} \omega^2 \quad \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{EI}{m}} \lambda^2$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}, \quad \cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

$$Y|_{at x=0} = Y'|_{at x=0} = 0,$$

$$Y|_{at x=0} = C_2 + C_4 = 0$$

$$Y'|_{at x=0} = \lambda(C_1 + C_3) = 0$$

$$Y''|_{at x=L} = \lambda^2 (-C_1 \sin(\lambda L) - C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L)) = 0$$

$$Y'''|_{at x=L} = \lambda^3 (-C_1 \cos(\lambda L) + C_2 \sin(\lambda L) + C_3 \cosh(\lambda L) + C_4 \sinh(\lambda L)) = 0$$

その3 : $M \neq 0$, $m \neq 0$ のとき

- その2の展開で境界条件の最後の式がダランベールの原理

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

$$w = Y(x)q(t) = Y(x)A \exp(i\omega t)$$

$$Y = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x)$$

$$Y''' \Big|_{atx=L} = \lambda^3 (-C_1 \cos(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \cosh(\lambda L) + C_4 \sinh(\lambda L)) = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{atx=L} = 0 \rightarrow$$

$$EI (-C_1 \cos(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \cosh(\lambda L) + C_4 \sinh(\lambda L))$$

$$+ W \omega^2 (C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) + C_4 \cosh(\lambda L)) = 0$$

近似解法で解くとすると

- 梁の曲げによるひずみエネルギー $U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$
- 質点群の運動エネルギー $T = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m (A\omega)^2$

Rayleigh method

$$w \approx \frac{A}{L^2} x^2 \exp(i\omega t) \rightarrow M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2EI \frac{A}{L^2} \exp(i\omega t)$$

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx = 2EI \frac{A^2}{L^3} \exp^2(i\omega t)$$

$$U_0 = 2EI \frac{A^2}{L^3}$$

No1

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{L^2} x^2 i\omega \exp(i\omega t)$$

$$T = -\frac{W}{2} \omega^2 A^2 \exp^2(i\omega t)$$

$$T_0 = \frac{W}{2} \omega^2 A^2$$

$$T_0 = U_0$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2EI}{L^3}}{\frac{W}{2}} = \frac{4EI}{WL^3}$$

Rayleigh method

$$w \approx \frac{A}{L^2} x^2 \exp(i\omega t) \rightarrow M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2EI \frac{A}{L^2} \exp(i\omega t)$$

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx = 2EI \frac{A^2}{L^3} \exp^2(i\omega t)$$

$$U_0 = 2EI \frac{A^2}{L^3}$$

No3

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{L^2} x^2 i\omega \exp(i\omega t)$$

$$T = -\frac{W}{2} \omega^2 A^2 \exp^2(i\omega t) + \int \frac{m}{2} \left(\frac{A}{L^2} x^2 i\omega \exp(i\omega t) \right)^2 dx$$

$$= -\omega^2 A^2 \exp^2(i\omega t) \left(\frac{W}{2} + \frac{mL}{2 \cdot 5} \right)$$

$$T_0 = \left(\frac{W}{2} + \frac{mL}{10} \right) \omega^2 A^2$$

$$T_0 = U_0$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2EI}{L^3}}{\left(\frac{W}{2} + \frac{mL}{10} \right)}$$

重み付き残渣法

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$R(u_{app}) = L[u_{app}] \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

- 運動方程式に近似解を適用した残渣を最小化する
 - 厳密解だったら残渣はゼロ
 - 近似解であっても（であるから）
 - 必ず境界条件を満たすものを採用することがポイント

• 最小自乗法

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$\frac{\partial \int R(u_{app})^2 dx}{\partial a_j} = 2 \int R(u_{app}) \frac{\partial R(u_{app})}{\partial a_j} dx = 0 \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

• ガラーキン法

- 出所は汎関数の変分最小化

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$\int R(u_{app}) \Psi_j dx = 0 \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

重み付き残渣法

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$R(u_{app}) = L[u_{app}] \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

- 運動方程式に近似解を適用した残渣を最小化する
 - 厳密解だったら残渣はゼロ
 - 近似解であっても（であるから）
 - 必ず境界条件を満たすものを採用することがポイント

• 最小自乗法

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$\frac{\partial \int R(u_{app})^2 dx}{\partial a_j} = 2 \int R(u_{app}) \frac{\partial R(u_{app})}{\partial a_j} dx = 0 \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

• ガラーキン法

- 出所は汎関数の変分最小化

$$u_{app} = \sum_j a_j \Psi_j$$

$$\int R(u_{app}) \Psi_j dx = 0 \leftarrow S[u_{app}] = 0$$

先の例題に適用

- 手順は理解しやすいが、計算の複雑さは避けられない

$$m \neq 0, \quad W \neq 0$$

$$w_{app} \approx \sum_i C_i \psi_i q(t) \equiv (C_1 x^4 + C_2 x^5) \exp(i\omega t)$$

BC

$$w_{app} \Big|_{at x=0} = 0$$

$$\frac{\partial w_{app}}{\partial x} \Big|_{at x=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_{app}}{\partial x^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w_{app}}{\partial x^3} \Big|_{at x=L} = W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L}$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$R = \left(m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)$$

$$\text{LS} \Rightarrow 0 = \frac{\partial \left(\int R^2 dx \right)}{\partial C_i}$$

$$\text{Galerkin} \Rightarrow 0 = \int R \psi_i dx$$

部分積分

- 部分積分を思い出してもらいます

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

$$\int \frac{du}{dx}v dx = [uv] - \int u \frac{dv}{dx} dx$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$R(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$w \triangleq \sum_i C_i \psi_i q(t) = \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{dw}{dx} = \left(\sum_i C_i \frac{d\psi_i}{dx} \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(\sum_i C_i \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^{(n)} w}{dx^{(n)}} = \left(\sum_i C_i \frac{d^{(n)} \psi_i}{dx^{(n)}} \right) \exp(i\omega t)$$

$$\int R(w) \psi_i dx = 0$$

$$\int \left(m \frac{\partial^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \exp(i\omega t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \exp(i\omega t)}{\partial x^2} \right) \psi_i dx = 0$$

$$\int \left(-m\omega^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right) + EI \frac{d^4 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^4} \right) \psi_i dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \psi_i dx + \int \left(EI \frac{d^4 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^4} \right) \psi_i dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \psi_i dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right] - \int \left(EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \right) \frac{d\psi_i}{dx} dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \psi_i dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right] - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right] + \int \left(EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \right) \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} dx = 0$$



境界条件のせん断力項



境界条件の曲げモーメント項

具体的に

$$w \triangleq C_1 x^2 \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 x^2 x^2 dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + \int_0^L (EI 2C_1) 2dx = 0$$

$$C_1 \left(\frac{-m\omega^2}{5} L^5 + 4EIL \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{20EI}{mL^4} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20EI}{mL^4}} \approx 4.47 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2} \right) dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(-m\omega^2 \left(L - 2\left(\frac{2L}{\pi}\right) + \frac{L}{2} \right) + EI \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{\pi^4}{32} \right) EI}{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) mL^4} \Rightarrow \omega \approx 3.66 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

厳密解

$$\omega = 3.52 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

先端の質点がWだったら、境界条件のせん断力を調整し

$$w|_{at x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{at x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$-S - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial M}{\partial x} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$\rightarrow EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{at x=L} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{at x=L} + \omega^2 W C_1 \exp(i\omega t) = 0$$

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) dx +$$

$$\left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2} \right) dx +$$

$$\left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(-m\omega^2 \left(L - 2\left(\frac{2L}{\pi}\right) + \frac{L}{2} \right) - \omega^2 W + EI \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{\pi^4}{32L^3}\right) EI}{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) mL + W}$$

$$m \rightarrow 0 \quad \omega^2 \approx \frac{3.044 EI}{WL^3}$$

例題:両端埋め込み梁に適用

- スパンはL, 分布質量はmとすれば

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

- 近似関数は

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right) \sin \frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \sin \frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \psi_i dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right] - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right] + \int \left(EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \right) \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{L} + \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI \left(C_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^2 \int_0^L \cos^2 \frac{2\pi x}{L} x dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2 \cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1 + \cos 4 \frac{\pi x}{L}}{2} \right) dx + \left[EI \frac{d^3 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2 \left(\sum_i C_i \psi_i \right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EIC_1 \left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^2 \int_0^L \frac{1 + \cos 4 \frac{\pi x}{L}}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(\frac{-m\omega^2 3}{2} L + EI \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{EI}{3m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \Rightarrow \omega = 22.79 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

嚴密解

$$\omega = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 22.4 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

時間領域の追跡

- 種々の方法が提案されており目的に応じて使い分ける
- 比較的一般的
 - オイラー法
 - 修正オイラー法（2次のルンゲクッタ法）
 - ルンゲクッタ法
- 偏微分方程式の時
 - クランクニコルソン法 ルンゲクッタ法に類似
- 振動の運動方程式
 - 線形加速度法
 - ニューマークのベータ法
 - ウィルソンのシータ法

簡単にオイラー法

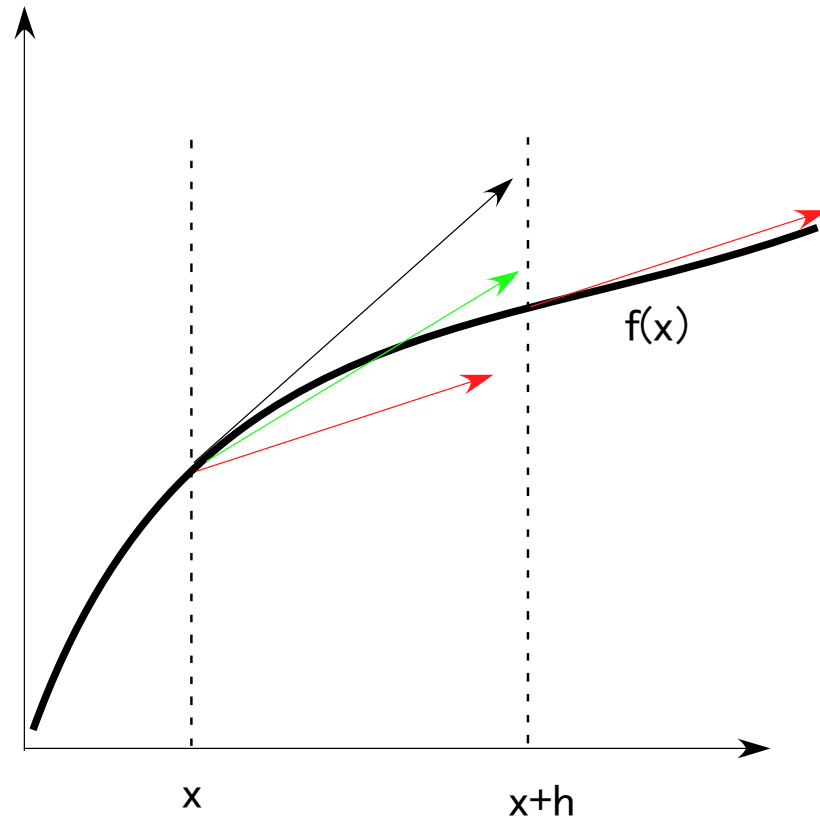
- 関数をテイラー展開

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \dots$$

$$O(h^2) \sim \text{negl}$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f^{(1)}(x)h$$

- 黒矢印で順次推定がオイラー法
- $x+h$ の傾きを使って推定精度を向上させる仕組みが修正オイラー法



線形加速度法

- 区間の加速度変化は一定とする
- 振動に特化
- 解き方
 - t の変位, 速度, 加速度は分かっているとし,
 - $t+h$ の運動方程式と右の関係からまず加速度を解き,
 - 速度, 変位を推定する
- $B = 1/6$ の時ニューマークの β 法と一致

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t+h) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + \alpha h$$

$$\frac{df}{dt}(t+h) = \frac{df}{dt}(t) + \frac{d^2 f}{dt^2}(t)h + \frac{\alpha}{2}h^2$$

$$= \frac{df}{dt}(t) + \frac{d^2 f}{dt^2}(t)h + \frac{\frac{d^2 f}{dt^2}(t+h) - \frac{d^2 f}{dt^2}(t)}{2}h$$

$$f(t+h) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)h + \frac{d^2 f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2} + \frac{\alpha}{6}h^3$$

$$= f(t) + \frac{df}{dt}(t)h + \frac{d^2 f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2} + \frac{\frac{d^2 f}{dt^2}(t+h) - \frac{d^2 f}{dt^2}(t)}{6}h^2$$

$$f(t+h) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)h + \frac{d^2 f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{3} + \frac{d^2 f}{dt^2}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

Newmark β

$$f(t+h) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)h + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\frac{d^2 f}{dt^2}(t)h^2 + \beta\frac{d^2 f}{dt^2}(t+h)h^2$$

わかりにくいので線形加速度法で もう少し展開

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f$$

$$\ddot{u} = \frac{f}{m} - 2\zeta\omega_0\dot{u} - \omega_0^2 u$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h) - \omega_0^2 u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h) = \dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t+h) + \ddot{u}(t)}{2} h$$

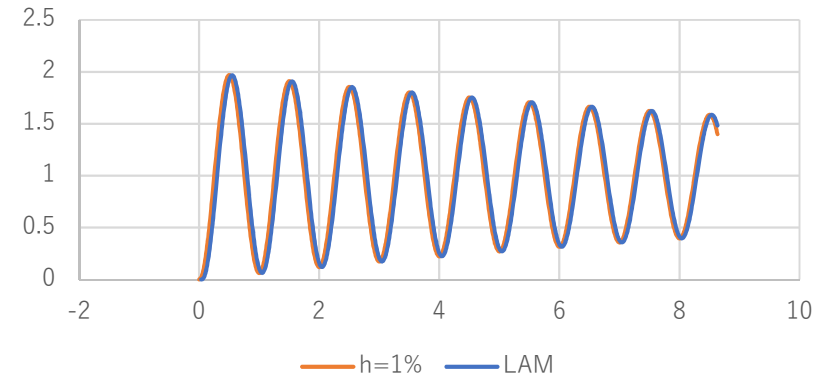
$$u(t+h) = u(t) + \dot{u}(t)h + \ddot{u}(t)\frac{h^2}{3} + \ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h) - \omega_0^2 u(t+h)$$

$$= \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0 \left(\dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t+h) + \ddot{u}(t)}{2} h \right) - \omega_0^2 \left(u(t) + \dot{u}(t)h + \ddot{u}(t)\frac{h^2}{3} + \ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6} \right)$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{\frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0 \left(\dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t)}{2} h \right) - \omega_0^2 \left(u(t) + \dot{u}(t)h + \ddot{u}(t)\frac{h^2}{3} \right)}{\left(1 + \zeta h\omega_0 + \frac{h^2}{6}\omega_0^2 \right)}$$

ステップ応答



Newmarkの β 法でも係数が少し変わるだけ

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f$$

$$\ddot{u} = \frac{f}{m} - 2\zeta\omega_0\dot{u} - \omega_0^2 u$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h) - \omega_0^2 u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h) = \dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t+h) + \ddot{u}(t)}{2} h$$

$$u(t+h) = u(t) + \dot{u}(t)h + \ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 + \beta\ddot{u}(t+h)h^2$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h) - \omega_0^2 u(t+h)$$

$$= \frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t+h) + \ddot{u}(t)}{2} h\right) - \omega_0^2\left(u(t) + \dot{u}(t)h + \ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 + \beta\ddot{u}(t+h)h^2\right)$$

$$\ddot{u}(t+h) = \frac{\frac{f}{m}(t+h) - 2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t)}{2} h\right) - \omega_0^2\left(u(t) + \dot{u}(t)h + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}(t)h^2\right)}{(1 + \zeta h\omega_0 + \beta h^2\omega_0^2)}$$

非線形性を導入した解析

- 時系列解析ならば
 - 時間に応じた変位関係の状況を反映した剛性関係を導入できる
 - Updated
- それでも振動モード形を求めたときがある
 - 接線剛性法
 - 反力－変位の関係の接線（剛性）を利用する

課題

- 近似解法で手を動かして解いてみよう
- 弦の場合で適用してみよう
- 諸元はお任せ