不規則振動への拡張

設計論で荷重化の議論エッセンス

多自由度系への拡張

- 運動方程式

$$m(x)\frac{d^2u(x,t)}{dt^2}+c(x)\frac{du(x,t)}{dt}+K(u(x,t))=f(x,t)$$

$$[M]\frac{d^2\{u(t)\}}{dt^2}+[C]\frac{d\{u(t)\}}{dt}+[K]\{u(t)\}=\{f(t)\}$$

- モーダルアナリシス

$$\{u\}=\{\varphi\}q(t)\quad q(t)=A\exp(\omega t)$$

$$\{u\}=\sum_j\{\varphi_j\}q_j(t)\quad q_j(t)=A_j\exp(\omega_j t)$$

モーダルアナリシスによる一般化されたモード毎の量

- ｊ次振動モードに関する定義であり，振動モード毎に異なる.
  - 一般化質量　$\mathbf{M}_j = {}^T\{\varphi_j\}[M]\{\varphi_j\} = \int m\varphi_j\varphi_j^* dx$
  - 一般化減衰　$\mathbf{C}_j = {}^T\{\varphi_j\}[C]\{\varphi_j\} = \int c\varphi_j\varphi_j^* dx$
  - 一般化剛性　$\mathbf{K}_j = {}^T\{\varphi_j\}[K]\{\varphi_j\} = \int k\varphi_j\varphi_j^* dx$
  - 一般化外力　$\mathbf{F}_j = {}^T\{\varphi_j\}\{f\} = \int f\varphi_j^* dx$

一般化外力について展開

- クロススペクトル密度関数S(x_1,x_2,ω)

$$\mathbf{F}_j = {}^T\left\{\varphi_j\right\}\left\{f\right\} = \int f\varphi_j^* dx$$

*Fourier*変換

$$\Im_{\mathbf{F}_j}\left(\omega\right) = \int \Im_f\left(x,\omega\right)\varphi_j^*\left(x\right)dx$$

$$S_f\left(\omega\right) = \lim_{T\to\infty}\left\langle\left|F\right|^2\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^*\right\rangle$$

$$S_{\mathbf{F}_j}\left(\omega\right) = \lim_{T\to\infty}\left\langle\int \Im_f\left(x_1,\omega\right)\varphi_j^*\left(x_1\right)dx_1\int \Im_f^*\left(x_2,\omega\right)\varphi_j\left(x_2\right)dx_2\right\rangle$$

$$= \iint \lim_{T\to\infty}\left\langle \Im_f\left(x_1,\omega\right)\Im_f^*\left(x_2,\omega\right)\right\rangle\varphi_j^*\left(x_1\right)\varphi_j\left(x_2\right)dx_2$$

$$= \iint S_{\mathbf{F}}\left(x_1,x_2,\omega\right)\varphi_j^*\left(x_1\right)\varphi_j\left(x_2\right)dx_2$$

つづき

R:外力の空間相関関数

X：結合モード変換関数　joint-mode acceptance

$$S_{\mathbf{F}_j}(\omega)=\iint S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^{*}(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$=\iint S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^{*}(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$\because S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)=S_{\mathbf{F}}(\Delta x,\omega)$$

$$=R_{\mathbf{F}}(\Delta x,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega)=R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega)$$

$$=\iint R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega)\varphi_j^{*}(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$=S_{\mathbf{F}}(\omega)\iint R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^{*}(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$=S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)$$

つまりは

- Ｊ次モードに関し

$$S_{U_j}(\omega) = S_{F_j}(\omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

$$S_{\mathbf{F}_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1, x_2, \omega)$$

$$S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1, x_2, \omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

- １自由度系の定義に関し，結合モード変換関数がはいる
- 動的応答倍率の特性から低減衰の場合は固有値付近のエネルギーが卓越

$$S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1, x_2, \omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

$$S_U(\omega) = \sum_j S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\sum_j \mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1, x_2, \omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

不規則外力の荷重化

- 不規則応答
  - 対象は、変位でも、断面力でも
- 評価すべき最大値を求めたい
  - ある区間の極大値の平均。。。
  - 都市基盤構造では一般に減衰率は小さい
    - 動的応答倍率が固有振動数付近で極めて大きくなる
      - 振幅分布を見ると狭帯域のガウス過程である場合が多い
        - と仮定して、ある時間の極大ピークの期待値から以下の定式化がよく用いられる
    - 強風の場合、最大期待値は２、３内外
      - 瞬間最大風速は平均風速の３割、４割増し

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{s_0}}$$

$$s_r = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^r S_x(\omega) d\omega$$ ： r 次モーメント

$$s_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \sigma_x$$:分散

$$\overline{\eta_{\max}} = \int_0^{\infty} \eta p_{\max}(\eta) d\eta$$ $:p_{\max}(\eta)$ 極大値の分布、極値 I 型と同型

$$= \int_0^{\nu T} \eta \exp(-\eta) d\eta$$

T : 評価時間

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$ 見かけの（代表）円振動数

$$\overline{\eta_{\max}} = \sqrt{\left(2\ln\left(\nu T\right)\right)} + \frac{\gamma}{\sqrt{\left(2\ln\left(\nu T\right)\right)}}$$ γ :オイラー定数0.5772

課題

- 難しい議論でした
- 外力を荷重化する場合のイメージをまとめてください