不規則振動への拡張

設計論で荷重化の議論エッセンス

必要となる確率過程，統計の知識

- 集合
    - 集合
    - 平均，分散
    - 自己相関関数
- エルゴード性
- 定常
    - 狭義の定常
    - 広義の定常
- パワースペクトル
- フーリエスペクトル

複数の試行の時系列・確率過程

- 同じ条件で何度も繰り返す
- 不確実性によってきまる実験や観測などを試行(trial)
- 試行の結果起こる事柄を事象(event)
    - 事象のまとまりを集合（set, ensembleアンサンブル）
- 確率過程（stochastic process）
    - 時間とともに変化する確率変数

$$\{x(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1(t) \\ \bullet \\ x_i(t) \\ \bullet \\ x_n(t) \end{array} \right\}$$

平均とか，モーメント

- 平均とｎ次モーメント

アンサンブル平均

$$\left\langle x(t)\right\rangle = E\left(x(t)\right) = \frac{1}{N}\sum_i x_i(t)$$

aに関するn次モーメント $\left\langle (x-a)^n \right\rangle = E\left((x-a)^n\right)$

時間平均

$$\overline{x_i} = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty} x_i(t)$$

- 時間平均とアンサンブル平均が時間変化しな
  - ２次モーメントまで時間変化しない場合
    - （広義の，弱い）定常過程
    - より高次モーメントまで一致して，定常過程

エルゴード性

- 時間平均とアンサンブル平均が一致
  - 高次モーメントも
- エルゴード性が仮定できれば，時間平均とアンサンブル平均は可逆的
- 定常過程と誤解しやすい

$$\left\langle x(t)^n \right\rangle = E\left(x(t)^n \right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^n \, dt = \overline{x(t)^n}$$

$$mean\, x(t) = \left\langle x(t) \right\rangle = E\left(x(t) \right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \overline{x(t)}$$

$$\mathrm{var}\, x(t) = \left\langle \left(x(t) - \overline{x(t)} \right)^2 \right\rangle = E\left(\left(x(t) - \overline{x(t)} \right)^2 \right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^2 \, dt = \overline{x(t)^2} - \overline{x(t)}^2$$

自己相関関数

- モーメント関数の内の一つ
- 弱定常，エルゴード性が仮定できるとして
- 信号の周期性を表現できる

$$R_{xx}(\tau) = \left\langle \left(x(t) - \overline{x}\right)\left(x(t+\tau) - \overline{x}\right) \right\rangle$$

$$= E\left(\left(x(t) - \overline{x}\right)\left(x(t+\tau) - \overline{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(x(t) - \overline{x}\right)\left(x(t+\tau) - \overline{x}\right)dt$$

パワースペクトル密度関数:　PSD

- パワースペクトル密度関数
  - パワー
    - →　信号の自乗
  - スペクトル密度
    - →　周波数分布
- PSD：エネルギー分布を示すもの
  - 二次モーメントの周波数分布
  - ウィーナー＝ヒンチンの定理（Wiener–Khinchin theorem）
- PSDもRも原点対象

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^{T} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt$$

$$PSD(\omega) = S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left\langle |F|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \left\langle FF^* \right\rangle$$

$$Wiener - Khinchin theorem$$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) \exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\langle FF^* \right\rangle$$

１自由度系からの応用

- 単位ステップ外力による応答
- →微分して単位衝撃応答
- →外力時系列が分かれば
  - 単位衝撃応答と外力時系列の積の畳み込み積分
- フーリエ変換を利用すると
- →動的応答倍率を介して，外力と応答のフーリエ変換が関係づけられる
- →応答のパワースペクトル密度関数が得られる

- １自由度系の応答は，低減衰とすると（普通は当てはまる），固有振動数付近の周波数帯にパワーが集中する狭帯域ガウス過程
  - 包絡線がレイリー分布
  - 最大値の期待値の推定に使われる

単位の外力

$t > 0$

$$x_{unit\,step}(t) = -\frac{1}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{1}{k}$$

$$x_{unit\,impulse}(t) = \frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}}\left(\left(1+h^2\right)\omega_o \sin(\omega_D t) - h\omega_D \cos(\omega_D t)\right)$$

- 単位＝１の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
  - 線形だったら応答は大きさ倍

- ある時刻の外力の連続
  - 応答の重ね合わせ

$$f(t) = \left\{\cdots, f(t_n), \cdots\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \sum_i f(t_i)\, x_{unit\,impulse}(t - t_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(T)\, x_{unit\,impulse}(t - T)\, dT$$

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分　convolution

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} f\left(T\right)x_{unit\,impulse}\left(t-T\right)dT$$

- これをフーリエ変換，Tと ｔ －Tで別々に変換することができて

$$U\left(\omega\right)=F\left(\omega\right)X_{unit\,impulse}\left(\omega\right)$$

$$X\left(\omega_e\right)=\frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

$$X_{unit\,impulse}\left(\omega\right)=\frac{1}{k}H(\omega_e)$$

$$\left\langle\left\langle U\left(\omega\right)U^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle F\left(\omega\right)F^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle\frac{1}{k}H(\omega_e)\frac{1}{k}H^*(\omega_e)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left\langle\left\langle U\left(\omega\right)U^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\left\langle\left\langle F\left(\omega\right)F^*\left(\omega\right)\right\rangle\right\rangle}{T}\frac{1}{k^2}H(\omega_e)H^*(\omega_e)$$

$$S_U\left(\omega\right)=S_F\left(\omega\right)\frac{1}{k^2}\left|H(\omega_e)\right|^2$$

- 不規則外力とするとFは不確定，確率量，Xはシステムで決まる決定的な量
  - 確率的な扱い
  - 結果的にUも確率的な扱いが必要

課題

- まとめてください
  - 定常
  - エルゴード性