非線形振動
これは教科書にある内容は多くありません．

風による振動
自分が動く→周りの流れが変わる→流れからの反力を受ける→さらに自分が動く
のループ
自励振動

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$

$$
\begin{aligned}
f(x,\dot{x}) &= f(0)+\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}\dot{x}^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \dot{x}}x\dot{x}+\cdots \\
&\approx f(0)+\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{x}=f(0)+f_R x+f_I\dot{x}
\end{aligned}
$$

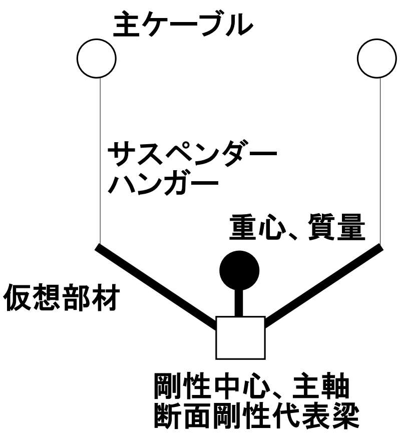
第一項は定常で，静的な変位項
第二項以降が，動的な項　その一時の項だけを採用するのが簡単な近似　係数は必ずしも定数ではない

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f=f(0)+f_R x+f_I\dot{x}$

定常項は除いて

$m\ddot{x}+\left(c-f_I\right)\dot{x}+\left(k-f_R\right)x=0$

速度項→減衰の変化　　　ゼロなら定常振動　負なら発散
剛性項→振動数の変化



外力自体は運動依存であるが，問題が複雑すぎて線形近似を行う．
・固有値問題に持ち込む→発散するかしないか　振幅ゼロの問題
・逐次近似→剛性項の線形近似

非線形振動でよるある問題の例を二つ

ダフィン型の問題
振り子の運動方程式

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

マクローリン展開

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

微小変位を仮定して，第一項で線形化

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

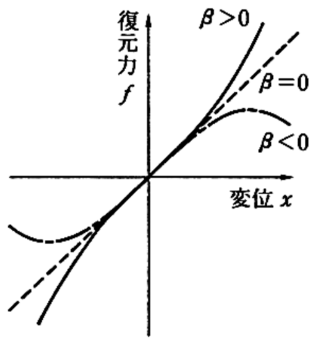
仮に第二項までとるとしたら

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\left(\theta - \frac{\theta^2}{3!}\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\left(1 - \frac{\theta}{6}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\left(1 + \beta\theta\right)\theta = 0 \quad \beta = -\frac{1}{6}$$

ダフィン方程式 Duffin equation



$\beta > 0$　硬化 hardening バネ
$\beta < 0$　軟化 softening バネ
硬化バネの例は少なくない　車のサスペンション
バネは鋼線のねじり変形
ピッチと長さ（鋼線の長さ）巻き径（トルク）

さてどのように解くか
Krylov-Bogoliubov の方法
まず

$$\theta = \Theta(t)\sin\left(\Psi(t)\right) \quad \Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$

振幅も位相も短い時間には大きく変化しないと仮定

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\Theta(t)}{dt}\sin\left(\Psi(t)\right) + \Theta(t)\cos(\Psi(t))\,\frac{d\Psi(t)}{dt} \qquad *$$

$$= \frac{d\Theta(t)}{dt}\sin\left(\Psi(t)\right) + \Theta(t)\cos(\Psi(t))\left(\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$\approx \Theta(t)\cos(\Psi(t))\;\omega_0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\Theta(t)}{dt}\cos(\Psi(t))\;\omega_0 - \Theta(t)\sin(\Psi(t))\left(\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

これを運動方程式に代入し，整理した式と
先の仮定で

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\Theta(t)}{dt}\sin\left(\Psi(t)\right) + \Theta(t)\cos(\Psi(t))\,\frac{d\Psi(t)}{dt}$$ の残渣項

$$\frac{d\Theta(t)}{dt}\sin\left(\Psi(t)\right) + \Theta(t)\cos(\Psi(t))\,\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

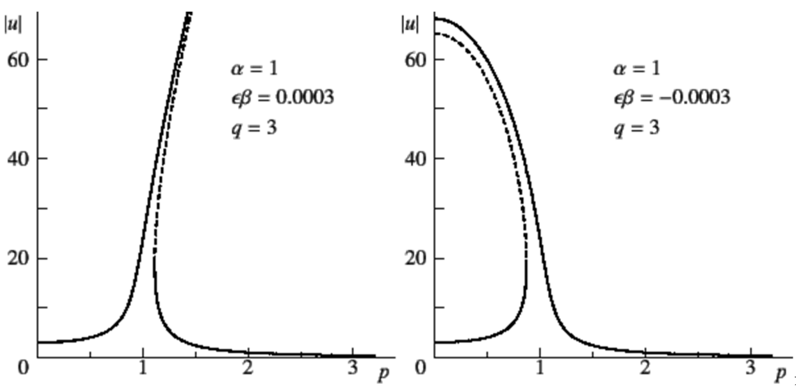
を連成させ，
振幅の変化率と位相の変化率について，位相空間で解く

摂動法　perturbation method
解をフーリエ係数を用いたべき展開して考える

$$\theta(\omega_0 t, \varepsilon) = \Theta\sin(\omega_0 t) + fourierseries(\omega_0 t, \varepsilon)$$

$$\omega = \omega_0 + fourierseries(\varepsilon)$$

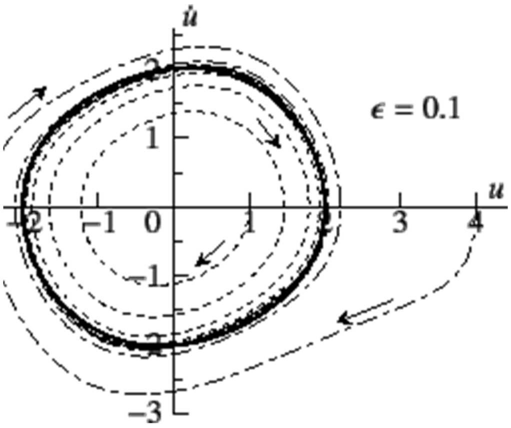
フーリエ級数の係数を順次決めていく



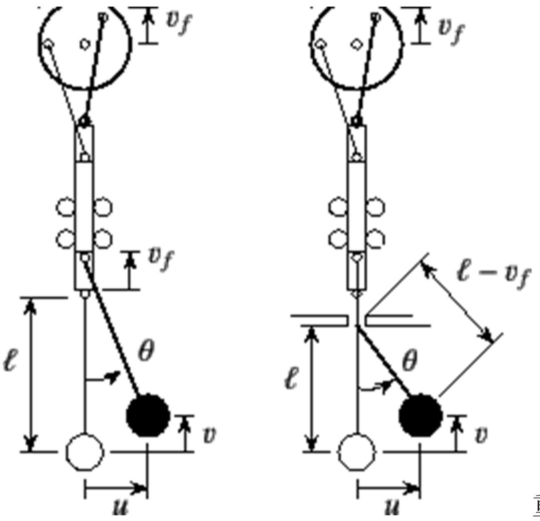
共振曲線の例

リミットサイクル

位相空間で初期条件によらない安定な軌跡を描く



マシュー型の問題



重心位置が変わることに置き換えてもいい

左の方

質点変位

$$u = l\sin(\theta) \quad v = l(1-\cos\theta) + v_f$$

張力 T とすると，運動方程式は

$$-T\sin\theta = m\ddot{u} \quad T\cos\theta - mg = m\ddot{v}$$

T を消去し，θ に関し微小振動を仮定し，整理すると

$$l\ddot{\theta}+\left(g+\ddot{v}_f\right)\sin\theta=0$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad v_f \triangleq -v^*\cos\omega t$$ Mathiew 方程式の類

$$\ddot{\theta}+\left(\omega_0{}^2+\frac{v^*}{l}\omega^2\cos\omega t\right)\theta=0$$

右でも同様

$$\tau\equiv\frac{1}{2}\omega t$$

$$\theta(t)\to u(\tau)$$

$$\delta\equiv\frac{4\omega_0{}^2}{\omega^2} \qquad \varepsilon\equiv\frac{v^*}{l}$$

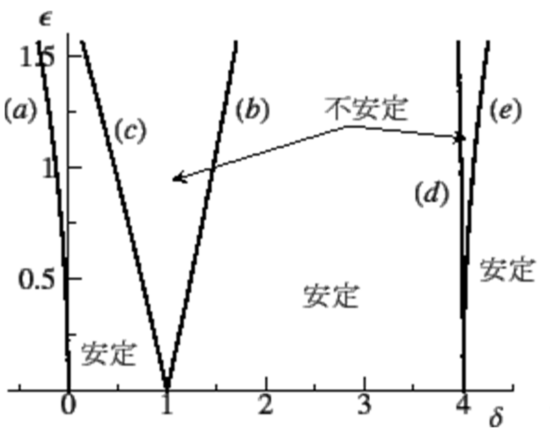
$$\ddot{u}(\tau)+\left(\delta+\varepsilon\cos 2\tau\right)u(\tau)=0$$

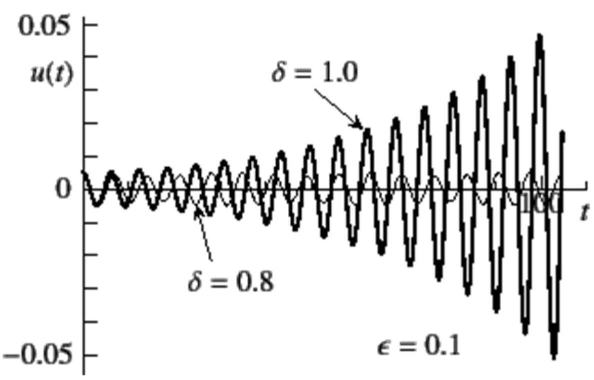
これをとけばいい
摂動法とか

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

$$\delta=\delta^{(0)}+\varepsilon\delta^{(1)}+O(\varepsilon^2)$$

代入整理，それぞれの次数に応じて解いていくと(a)から(e)のような解が得られる





ブランコをこいだり，斜張橋の桁加振に伴うケーブルの振動に相当．係数励振と呼ばれる