近似解法と時間領域の解析（つづき）

重み付き残渣法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$R\left(u_{app}\right)=L\left[u_{app}\right]\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

- 運動方程式に近似解を適用した残渣を最小化する
  - 厳密解だったら残渣はゼロ
  - 近似解であっても（であるから）
    - 必ず境界条件を満たすものを採用することがポイント
- 最小自乗法

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$\frac{\partial\int R\left(u_{app}\right)^2dx}{\partial a_j}=2\int R\left(u_{app}\right)\frac{\partial R\left(u_{app}\right)}{\partial a_j}dx=0\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

- ガラーキン法
  - 出所は汎関数の変分最小化

$$u_{app}=\sum_j a_j\Psi_j$$

$$\int R\left(u_{app}\right)\Psi_j dx=0\leftarrow S\left[u_{app}\right]=0$$

先の例題に適用　m≠0,　W≠ 0

- 手順は理解しやすいが，計算の複雑さは避けられない

$$w_{app}\approx\sum_i C_i\psi_i q(t)\equiv\left(C_1x^4+C_2x^5\right)\exp(i\omega t)$$

BC

$$w_{app}\big|_{at\,x=0}=0$$

$$\frac{\partial w_{app}}{\partial x}\bigg|_{at\,x=0}=0$$

$$\frac{\partial^2 w_{app}}{\partial x^2}\bigg|_{at\,x=L}=0$$

$$EI\frac{\partial^3 w_{app}}{\partial x^3}\bigg|_{at\,x=L}=W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{at\,x=L}$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$R=\left(m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)$$

$$\mathrm{LS}\Rightarrow 0=\frac{\partial\left(\int R^2dx\right)}{\partial C_i}$$

$$\mathrm{Galerkin}\Rightarrow 0=\int R\psi_i dx$$

部分積分

$$\frac{duv}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$$

- 部分積分を思い出してもらいます

$$\int\frac{du}{dx}vdx=[uv]-\int u\frac{dv}{dx}dx$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$R(w)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$w\triangleq\sum_i C_i\psi_i q(t)=\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{dw}{dx}=\left(\sum_i C_i\frac{d\psi_i}{dx}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\left(\sum_i C_i\frac{d^2\psi_i}{dx^2}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^{(n)}w}{dx^{(n)}}=\left(\sum_i C_i\frac{d^{(n)}\psi_i}{dx^{(n)}}\right)\exp(i\omega t)$$

$$\int R(w)\psi_i dx=0$$

$$\int\left(m\frac{\partial^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\exp(i\omega t)}{\partial x^2}\right)\right)\psi_i dx=0$$

$$\int\left(-m\omega^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)+EI\frac{d^4\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^4}\right)\psi_i dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\int\left(EI\frac{d^4\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^4}\right)\psi_i dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\int\left(EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\right)\frac{d\psi_i}{dx}dx=0$$

$$-m\omega^2\int\left(\sum_i C_i\psi_i\right)\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\left[EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]+\int\left(EI\frac{d^2\left(\sum_i C_i\psi_i\right)}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=0$$

境界条件のせん断力項

境界条件の曲げモーメント項

具体的に

$$w \triangleq C_1 x^2 \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 x^2 x^2 dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + \int_0^L (EI 2C_1) 2dx = 0$$

$$C_1 \left(\frac{-m\omega^2}{5} L^5 + 4EIL \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{20EI}{mL^4} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20EI}{mL^4}} \approx 4.47\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L} \right) dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L} \right)}{2} \right) dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L} \right)}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(-m\omega^2 \left(L - 2\left(\frac{2L}{\pi} \right) + \frac{L}{2} \right) + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{\pi^4}{32} \right) EI}{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) mL^4} \Rightarrow \omega \approx 3.66\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

厳密解

$$\omega = 3.52\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

5

先端の質点がWだったら、境界条件のせん断力を調整し

$$w\Big|_{at\,x=0} = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{at\,x=0} = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$-S - W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{\partial M}{\partial x} - W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$\rightarrow EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - W\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{at\,x=L} = 0$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{at\,x=L} + \omega^2 W C_1 \exp(i\omega t) = 0$$

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \exp(i\omega t)$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) dx +$$

$$\left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L} \right) dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{2L} \right) + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L} \right)}{2} \right) dx +$$

$$\left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L} \right)}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(-m\omega^2 \left(L - 2\left(\frac{2L}{\pi} \right) + \frac{L}{2} \right) - \omega^2 W + EI\left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{\pi^4}{32L^3} \right) EI}{\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) mL + W}$$

$$\mathrm{m} \rightarrow 0 \quad \omega^2 \approx \frac{3.044EI}{WL^3}$$

6

例題:両端埋め込み梁に適用

- スパンはL，分布質量はmとすれば

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

- 近似関数は

$$w \triangleq C_1 \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L} \right) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right) \sin\frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -C_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \sin\frac{2\pi x}{L} \exp(i\omega t)$$

7

$$-m\omega^2 \int \left(\sum_i C_i \psi_i \right) \psi_i dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right] - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right] + \int \left(EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \right) \frac{d^2\psi_i}{dx^2} dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\frac{2\pi x}{L} + \cos^2\frac{2\pi x}{L} \right) dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EI\left(C_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^2 \int_0^L \cos^2\frac{2\pi x}{L} x dx = 0$$

$$-m\omega^2 \int_0^L C_1 \left(1 - 2\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1 + \cos 4\frac{\pi x}{L}}{2} \right) dx + \left[EI \frac{d^3\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^3} \psi_i \right]_0^L - \left[EI \frac{d^2\left(\sum_i C_i \psi_i\right)}{dx^2} \frac{d\psi_i}{dx} \right]_0^L + EIC_1\left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)^2 \int_0^L \frac{1 + \cos 4\frac{\pi x}{L}}{2} dx = 0$$

$$C_1 \left(\frac{-m\omega^2 3}{2} L + EI\left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{EI}{3m}\left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \Rightarrow \omega{=}22.79\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

厳密解

$$\omega = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}{=}22.4\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

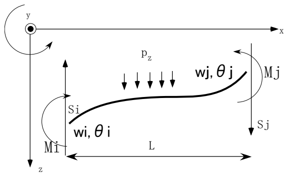
8

梁モデルに適用

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=p_z$$

- 一要素（element）



$$w \triangleq C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$$

$$w(x)=\left[1,x,x^2,x^3\right]\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dx}(x)=\left[0,1,2x,3x^2\right]\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x)=[0,0,2,6x]\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}$$

$$w(0)=C_1=w_i$$
$$w(L)=C_1+C_2L+C_3L^2+C_4L^3=w_j$$
$$\frac{dw}{dx}(0)=C_2=\theta_i$$
$$\frac{dw}{dx}(L)=C_2+2C_3L+3C_4L^2=\theta_j$$

$$\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&L&L^2&L^3\\0&1&2L&3L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&L&L^2&L^3\\0&1&2L&3L^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&-\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

9

$$w(x)=\left[1,x,x^2,x^3\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&-\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\left[1-\frac{3}{L^2}x^2+\frac{2}{L^3}x^3,x-\frac{2}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3,\frac{3}{L^2}x^2-\frac{2}{L^3}x^3,-\frac{1}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3\right]\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_j \psi_j u_j=\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}$$

$$\frac{dw}{dx}(x)=\left[0,1,2x,3x^2\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&-\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\left[-\frac{6}{L^2}x+\frac{6}{L^3}x^2,1-\frac{4}{L}x+\frac{3}{L^2}x^2,\frac{6}{L^2}x-\frac{6}{L^3}x^2,-\frac{2}{L}x+\frac{3}{L^2}x^2\right]\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_j\frac{d\psi_j}{dx}u_j=\left[\frac{d\psi_j}{dx}\right]\left\{u_j\right\}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x)=[0,0,2,6x]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&-\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12}{L^3}x,-\frac{4}{L}+\frac{6}{L^2}x,\frac{6}{L^2}-\frac{12}{L^3}x,-\frac{2}{L}+\frac{6}{L^2}x\right]\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_j\frac{d^2\psi_j}{dx^2}u_j=\left[\frac{d^2\psi_j}{dx^2}\right]\left\{u_j\right\}$$

10

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=p_z$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0$$

$$w(x)=\left[1-\frac{3}{L^2}x^2+\frac{2}{L^3}x^3,x-\frac{2}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3,\frac{3}{L^2}x^2-\frac{2}{L^3}x^3,-\frac{1}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3\right]\begin{Bmatrix}w_i\\\theta_i\\w_j\\\theta_j\end{Bmatrix}\exp(i\omega t)$$

$$=\left(\sum_j\psi_j u_j\right)\exp(i\omega t)=\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\exp(i\omega t)$$

$$\left(-\omega^2 m\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}}{\partial x^2}\right)\right)\exp(i\omega t)=0$$

$$-m\omega^2\int\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\left[EI\frac{d^2\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]+\int\left(EI\frac{d^2\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=0$$

11

$$-m\omega^2\int\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\psi_i dx+\left[EI\frac{d^3\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^3}\psi_i\right]-\left[EI\frac{d^2\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^2}\frac{d\psi_i}{dx}\right]+\int\left(EI\frac{d^2\left(\left[\psi_j\right]\left\{u_j\right\}\right)}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=0$$

$$-m\omega^2\left[\int\psi_j\psi_i dx\right]\left\{u_j\right\}+\begin{bmatrix}-S_i\\-S_j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}M_i\\M_j\end{bmatrix}+\left[\int\left(EI\frac{d^2\psi_j}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx\right]\left\{u_j\right\}=0$$

$i=1,\ \ j=1$

$$\int\psi_j\psi_i dx=\int\left(1-\frac{3}{L^2}x^2+\frac{2}{L^3}x^3\right)\left(1-\frac{3}{L^2}x^2+\frac{2}{L^3}x^3\right)dx=\frac{14}{5}L$$

$$\int\left(EI\frac{d^2\psi_j}{dx^2}\right)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}dx=EI\int\left(-\frac{6}{L^2}+\frac{12}{L^3}x\right)\left(-\frac{6}{L^2}+\frac{12}{L^3}x\right)dx=\frac{12EI}{L^3}$$

$i=1,\ \ j=2$

$i=1,\ \ j=3$

$i=1,\ \ j=4$

$i=2\ \ j=2$

$i=2,\ \ j=3$

$i=2,\ \ j=4$

$i=3,\ \ j=3$

$i=3,\ \ j=4$

$i=4,\ \ j=4$

12

剛性マトリクスと直接剛性法

- 接点で接合
  - 部分を構成する梁を所要の位置に回転し重ね合わせ全体系の剛性マトリクスを得る
  - 構造力学で勉強したとおり

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \{u_j\}$$

13

質量マトリクスの表現

- 余り結果に違いは出ない
- 先の表現を整合質量 consistent mass
  - 同じ内挿関数を用いた質量マトリクス表現

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = m \begin{bmatrix} \int \psi_j \psi_i dx \end{bmatrix} \{u_j\}$$

- 集中質量 ramped mass モーメント項

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mL}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{u_j\}$$

14

マトリクス構造解析

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\}$$

- 剛性マトリクス，減衰マトリクス，剛性マトリクス，外力ベクトルの準備ができたら
  - 線形系の振動解析だったら
    - 振動固有モード → 固有値解析
    - 不規則振動応答 → モーダルアナリシス
  - 非線形系だったら
    - 剛性マトリクス他が変位依存
      - 幾何学的非線形性
      - 力学的非線形性
- 要素は
  - 一次元　直線
  - 二次元　三角形，四角，極座標系
  - 三次元　三角錐，直方体．．

15

時間領域の追跡

- 種々の方法が提案されており目的に応じて使い分ける
- 比較的一般的
  - オイラー法
  - 修正オイラー法（２次のルンゲクッタ法）
  - ルンゲクッタ法
- 偏微分方程式の時
  - クランクニコルソン法　ルンゲクッタ法に類似
- 振動の運動方程式
  - 線形加速度法
  - ニューマークのベータ法
  - ウィルソンのシータ法

16

簡単にオイラー法

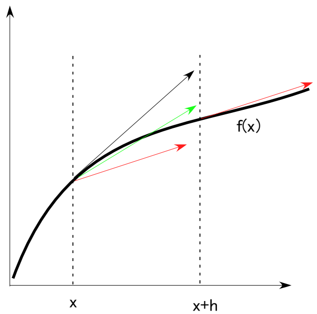
- 関数をテイラー展開

$$f(x+h)=f(x)+f^{(1)}(x)h+\frac{f^{(2)}(x)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\cdots$$

$$O(h^2)\sim \mathrm{negl}$$

$$f(x+h)\approx f(x)+f^{(1)}(x)h$$

- 黒矢印で順次推定がオイラー法
- ｘ＋ｈの傾きを使って推定精度を向上させる仕組みが修正オイラー法



17

線形加速度法

- 区間の加速度変化は一定とする
- 振動に特化
- 解き方
  - tの変位，速度，加速度は分かっているとし，
  - t+hの運動方程式と右の関係からまず加速度を解き，
  - 速度，変位を推定する
- B=１/６の時ニューマークのβ法と一致

$$\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)=\frac{d^2f}{dt^2}(t)+\alpha h$$

$$\frac{df}{dt}(t+h)=\frac{df}{dt}(t)+\frac{d^2f}{dt^2}(t)h+\frac{\alpha}{2}h^2$$

$$=\frac{df}{dt}(t)+\frac{d^2f}{dt^2}(t)h+\frac{\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)-\frac{d^2f}{dt^2}(t)}{2}h$$

$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2}+\frac{\alpha}{6}h^3$$

$$=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{2}+\frac{\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)-\frac{d^2f}{dt^2}(t)}{6}h^2$$

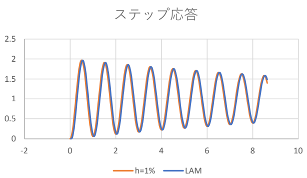
$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\frac{d^2f}{dt^2}(t)\frac{h^2}{3}+\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

Newmark β

$$f(t+h)=f(t)+\frac{df}{dt}(t)h+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\frac{d^2f}{dt^2}(t)h^2+\beta\frac{d^2f}{dt^2}(t+h)h^2$$

18

わかりにくいので線形加速度法でもう少し展開



$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f$$

$$\ddot{u}=\frac{f}{m}-2\zeta\omega_0\dot{u}-{\omega_0}^2u$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-{\omega_0}^2u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h)=\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h$$

$$u(t+h)=u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}+\ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6}$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-{\omega_0}^2u(t+h)$$

$$=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h\right)-{\omega_0}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}+\ddot{u}(t+h)\frac{h^2}{6}\right)$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t)}{2}h\right)-{\omega_0}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\frac{h^2}{3}\right)}{\left(1+\zeta h\omega_0+\frac{h^2}{6}{\omega_0}^2\right)}$$

19

Newmarkのβ法でも係数が少し変わるだけ

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f$$

$$\ddot{u}=\frac{f}{m}-2\zeta\omega_0\dot{u}-{\omega_0}^2u$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-{\omega_0}^2u(t+h)$$

$$\dot{u}(t+h)=\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h$$

$$u(t+h)=u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2+\beta\ddot{u}(t+h)h^2$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\dot{u}(t+h)-{\omega_0}^2u(t+h)$$

$$=\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t+h)+\ddot{u}(t)}{2}h\right)-{\omega_0}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\ddot{u}(t)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2+\beta\ddot{u}(t+h)h^2\right)$$

$$\ddot{u}(t+h)=\frac{\frac{f}{m}(t+h)-2\zeta\omega_0\left(\dot{u}(t)+\frac{\ddot{u}(t)}{2}h\right)-{\omega_0}^2\left(u(t)+\dot{u}(t)h+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{u}(t)h^2\right)}{\left(1+\zeta h\omega_0+\beta h^2{\omega_0}^2\right)}$$

20

非線形性を導入した解析

- 時系列解析ならば
  - 時間に応じた変位関係の状況を反映した剛性関係を導入できる
  - Updated
- それでも振動モード形を求めたときがある
  - 接線剛性法
  - 反力－変位の関係の接線（剛性）を利用する

21