不規則振動への拡張

1

必要となる確率過程，統計の知識

- 集合
  - 集合
  - 平均，分散
  - 自己相関関数
- エルゴード性
- 定常
  - 狭義の定常
  - 広義の定常
- パワースペクトル
- フーリエスペクトル

2

複数の試行の時系列・確率過程

- 同じ条件で何度も繰り返す
- 不確実性によってきまる実験や観測などを試行(trial)
- 試行の結果起こる事柄を事象(event)
  - 事象のまとまりを集合（set, ensembleアンサンブル）
- 確率過程（stochastic process）
  - 時間とともに変化する確率変数

$$\{x(t)\} = \left\{\begin{matrix} x_1(t) \\ \bullet \\ x_i(t) \\ \bullet \\ x_n(t) \end{matrix}\right\}$$

3

平均とか，モーメント

- 平均とｎ次モーメント

アンサンブル平均

$$\langle x(t)\rangle = E\left(x(t)\right) = \frac{1}{N}\sum_i x_i(t)$$

aに関するn次モーメント $\left\langle (x-a)^n \right\rangle = E\left((x-a)^n\right)$

時間平均

$$\overline{x_i} = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty} x_i(t)$$

- 時間平均とアンサンブル平均が時間変化しな
  - ２次モーメントまで時間変化しない場合
    - （広義の，弱い）定常過程
    - より高次モーメントまで一致して，定常過程

4

エルゴード性

- 時間平均とアンサンブル平均が一致
  - 高次モーメントも
- エルゴード性が仮定できれば，時間平均とアンサンブル平均は可逆的
- 定常過程と誤解しやすい

$$\left\langle x(t)^n \right\rangle = E\left(x(t)^n\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^n \, dt = \overline{x(t)^n}$$

$$mean\, x(t) = \left\langle x(t) \right\rangle = E\left(x(t)\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t) dt = \overline{x(t)}$$

$$\operatorname{var} x(t) = \left\langle \left(x(t) - \overline{x(t)}\right)^2 \right\rangle = E\left(\left(x(t) - \overline{x(t)}\right)^2\right) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)^2 \, dt = \overline{x(t)^2} - \overline{x(t)}^2$$

5

自己相関関数

- モーメント関数の内の一つ
- 弱定常，エルゴード性が仮定できるとして
- 信号の周期性を表現できる

$$R_{xx}(\tau) = \left\langle \left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right) \right\rangle$$
$$= E\left(\left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(x(t) - \bar{x}\right)\left(x(t+\tau) - \bar{x}\right) dt$$

6

パワースペクトル密度関数:　PSD

- パワースペクトル密度関数
  - パワー
    - →　信号の自乗
  - スペクトル密度
    - →　周波数分布
- PSD：エネルギー分布を示すもの
  - 二次モーメントの周波数分布
  - ウィーナー＝ヒンチンの定理（Wiener–Khinchin theorem）
- PSDもRも原点対象

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T}}\int_{-T}^{T} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt$$

$$PSD(\omega) = S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left\langle |F|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^* \right\rangle$$

$Wiener - Khinchintheorem$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau)\exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\, dt \exp(-i\omega\tau)\, d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^* \right\rangle$$

7

１自由度系への適用

- 単位ステップ外力による応答
- →微分して単位衝撃応答
- →外力時系列が分かれば
  - 単位衝撃応答と外力時系列の積の畳み込み積分
- フーリエ変換を利用すると
- →動的応答倍率を介して，外力と応答のフーリエ変換が関係づけられる
- →応答のパワースペクトル密度関数が得られる

- １自由度系の応答は，低減衰とすると（普通は当てはまる），固有振動数付近の周波数帯にパワーが集中する狭帯域ガウス過程
  - 包絡線がレイリー分布
  - 最大値の期待値の推定に使われる

8

単位の外力

$$t>0$$

- 単位＝１の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
  - 線形だったら応答は大きさ倍

$$x_{unit\,step}(t)=-\frac{1}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t)+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right)+\frac{1}{k}$$

$$x_{unit\,impulse}(t)=\frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}}\left(\left(1+h^2\right)\omega_o\sin(\omega_D t)-h\omega_D\cos(\omega_D t)\right)$$

- ある時刻の外力の連続
  - 応答の重ね合わせ

$$f(t)=\{\cdots,f(t_n),\cdots\}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t)=\sum_i f(t_i)x_{unit\,impulse}(t-t_i)$$

$$=\int_{-\infty}^{t} f(T)x_{unit\,impulse}(t-T)dT$$

9

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分　convolution

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(T)x_{unit\,impulse}(t-T)dT$$

- これをフーリエ変換，Tと ｔ −Tで別々に変換することができて

$$U(\omega)=F(\omega)X_{unit\,impulse}(\omega)$$

$$X(\omega_e)=\frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

$$X_{unit\,impulse}(\omega)=\frac{1}{k}H(\omega_e)$$

$$\left\langle\left\langle U(\omega)U^*(\omega)\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle F(\omega)F^*(\omega)\right\rangle\right\rangle\frac{1}{k}H(\omega_e)\frac{1}{k}H^*(\omega_e)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left\langle\left\langle U(\omega)U^*(\omega)\right\rangle\right\rangle}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\left\langle\left\langle F(\omega)F^*(\omega)\right\rangle\right\rangle}{T}\frac{1}{k^2}H(\omega_e)H^*(\omega_e)$$

$$S_U(\omega)=S_F(\omega)\frac{1}{k^2}\left|H(\omega_e)\right|^2$$

- 不規則外力とするとFは不確定，確率量，Xはシステムで決まる決定的な量
  - 確率的な扱い
  - 結果的にUも確率的な扱いが必要

10

多自由度系への拡張

- 運動方程式

$$m(x)\frac{d^2u(x,t)}{dt^2}+c(x)\frac{du(x,t)}{dt}+K(u(x,t))=f(x,t)$$

$$[M]\frac{d^2\{u(t)\}}{dt^2}+[C]\frac{d\{u(t)\}}{dt}+[K]\{u(t)\}=\{f(t)\}$$

- モーダルアナリシス

$$\{u\}=\{\varphi\}q(t)\quad q(t)=A\exp(\omega t)$$

$$\{u\}=\sum_j\{\varphi_j\}q_j(t)\quad q_j(t)=A_j\exp(\omega_j t)$$

11

モーダルアナリシスによる一般化されたモード毎の量

- ｊ次振動モードに関する定義であり，振動モード毎に異なる．
  - 一般化質量　$\mathbf{M}_j={}^T\{\varphi_j\}[M]\{\varphi_j\}=\int m\varphi_j\varphi_j^*dx$
  - 一般化減衰　$\mathbf{C}_j={}^T\{\varphi_j\}[C]\{\varphi_j\}=\int c\varphi_j\varphi_j^*dx$
  - 一般化剛性　$\mathrm{K}_j={}^T\{\varphi_j\}[K]\{\varphi_j\}=\int k\varphi_j\varphi_j^*dx$
  - 一般化外力　$\mathbf{F}_j={}^T\{\varphi_j\}\{f\}=\int f\varphi_j^*dx$

12

一般化外力について展開

- クロススペクトル密度関数S(x_1,x_2,ω)

$$\mathbf{F}_j = {}^T\{\varphi_j\}\{f\} = \int f\varphi_j^* dx$$

*Fourier*変換

$$\Im_{\mathbf{F}_j}(\omega) = \int \Im_f(x,\omega)\varphi_j^*(x)\,dx$$

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left\langle |F|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty}\left\langle FF^* \right\rangle$$

$$S_{\mathbf{F}_j}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left\langle \int \Im_f(x_1,\omega)\varphi_j^*(x_1)\,dx_1 \int \Im_f^*(x_2,\omega)\varphi_j(x_2)\,dx_2 \right\rangle$$

$$= \iint \lim_{T\to\infty}\left\langle \Im_f(x_1,\omega)\Im_f^*(x_2,\omega)\right\rangle \varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$= \iint S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

13

つづき

R:外力の空間相関関数

X：結合モード変換関数　joint-mode acceptance

$$S_{\mathbf{F}_j}(\omega) = \iint S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$= \iint S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$\because S_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega) = S_{\mathbf{F}}(\Delta x,\omega)$$

$$= R_{\mathbf{F}}(\Delta x,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega) = R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega)$$

$$= \iint R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)S_{\mathbf{F}}(\omega)\varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$= S_{\mathbf{F}}(\omega)\iint R_{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\omega)\varphi_j^*(x_1)\varphi_j(x_2)\,dx_2$$

$$= S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)$$

14

つまりは

- Ｊ次モードに関し

$$S_{U_j}(\omega) = S_{F_j}(\omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

$$S_{\mathbf{F}_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)$$

$$S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

- １自由度系の定義に関し，結合モード変換関数がはいる
- 動的応答倍率の特性から低減衰の場合は固有値付近のエネルギーが卓越

$$S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

$$S_U(\omega) = \sum_j S_{U_j}(\omega) = S_{\mathbf{F}}(\omega)\sum_j \mathrm{X}_{\mathbf{F}_j}(x_1,x_2,\omega)\frac{1}{k^2}\left|H_j(\omega)\right|^2$$

15