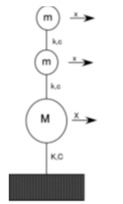
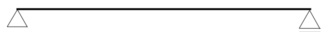
分布質量系，多自由度系への拡張

分布質量系
多自由度系



- 分布質量系
  - 構造特性に分布がある
    - 基本構造なら梁とか弦とか，
    - 一般の構造物
- 多自由度系
  - 自由度が多い系の話し
  - 代表的な動きで離散化
  - 有限要素モデル

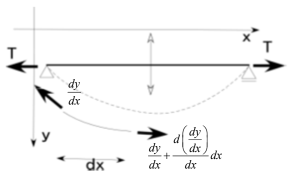


まずは，弦から

- 張力の構造　教科書２．６．３
- 微少変形
  - 弦は伸びない　不伸張　張力変化はない
  - 運動に伴う傾きによる，運動方向への分力が反力
- 運動方程式はダランベールの原理を適用すると
- ρは単位長さあたりの弦の質量
- 減衰は話しが複雑になるのでｈ＝０を設定し，減衰項はなし

$$-\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\left(-T\frac{\partial y}{\partial x}+T\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}dx\right)\right)=0$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



変位ｙは位置ｘと時間の関数

- 変位ｙが位置と時間の2独立変数を持つ関数なので，偏微分になっている
- 教科書とおりといても良いが
- 変数分離型の解法戦略を考える

$y=Y(x)q(t)$

いつものように

$q(t)\triangleq A\bullet\exp(i\omega t)$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho Y\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=Tq\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$-\rho Y\omega^2 A\bullet\exp(i\omega t)=T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}A\bullet\exp(i\omega t)$$

$$\left(\rho\omega^2 Y+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)q=0$$

$$\left(\rho\omega^2 Y+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\equiv 0 \quad \because q\neq 0$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x) \quad \because \lambda=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

天下り的な正弦波状形状関数の解というわけではない

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\rho Y\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=Tq\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$-\rho Y\omega^2 A\bullet\exp(i\omega t)=T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}A\bullet\exp(i\omega t)$$

$$\left(\rho\omega^2 Y+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)q=0$$

$$\left(\rho\omega^2 Y+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\equiv 0 \quad \because q\neq 0$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x) \quad \because \lambda=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

- 細かくは

$$\left(\rho\omega^2 Y+T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\equiv 0 \quad \because q\neq 0$$

$Y=C\exp(\Lambda x)$ として

$$\Lambda=\pm i\lambda \because \lambda=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}$$

$$\begin{aligned}Y&=C_1\exp(i\lambda x)+C_2\exp(-i\lambda x)\\&=(C_1+C_2)\cos(\lambda x)+i(C_1-C_2)\sin(\lambda x)\\&\Rightarrow C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)\end{aligned}$$

5

形状を決めるための境界条件を適用

- 境界条件は弦の長さがLとすると

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x) \quad \because \lambda=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}=\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

$$Y\big|_{at\,x=0}=C_2=0$$

$$Y\big|_{at\,x=L}=C_1\sin(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)=C_1\sin(\lambda L)=0$$

$$\lambda L=n\pi \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{n\pi}{L} \qquad n=1,2,3,4,\cdots$$

$$Y_n=C_{1,n}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T}}=\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}} \Rightarrow \;\omega_n=\lambda_n\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- 斉次解→

$$y=\sum_{j=1}y_j=\sum_{j=1}A_j\sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t)$$

6

梁では？

- せん断力レベルでの慣性力との釣り合い
  - ダランベールの原理を適用

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0$$

- 曲げ剛性EI,単位長さあたり重量wは均一を仮定

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$

$$y=Y(x)q(t)=Y(x)A\exp(i\omega t)$$

$$\left(-\frac{w}{g}\omega^2 Y+EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}\right)q=0$$

$$\lambda^4\triangleq\frac{w}{gEI}\omega^2 \quad \to\omega=\sqrt{\frac{gEI}{w}}\lambda^2$$

$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$

$$\sinh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2},\quad \cosh(\lambda x)=\frac{e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}}{2}$$

7

境界条件でCを決める

- 要な境界条件は4つ→自明なものが良い
  - 二個変位（Y=0）ともう二個曲げモーメント（2階微分がゼロ）とかせん断力（3階微分がゼロ）,
  - 四つ変位とか
- 例えば，スパンLの
  - 単純梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\;Y''\big|_{at\,x=0}=Y''\big|_{at\,x=L}=0$$

  - 片持ち梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=0}=0,\;Y''\big|_{at\,x=L}=Y'''\big|_{at\,x=L}=0$$

  - 両端埋め込み梁

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\;Y'\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=L}=0$$

8

単純梁の場合

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\ Y''\big|_{at\,x=0}=Y''\big|_{at\,x=L}=0$$
$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$
$$Y\big|_{at\,x=0}=C_2+C_4=0$$
$$Y\big|_{at\,x=L}=C_1\sin(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\sinh(\lambda L)+C_4\cosh(\lambda L)=0$$
$$Y''\big|_{at\,x=0}=-\lambda^2C_2+\lambda^2C_4=0$$
$$Y''\big|_{at\,x=L}=-\lambda^2C_1\sin(\lambda L)-\lambda^2C_2\cos(\lambda L)+\lambda^2C_3\sinh(\lambda L)+\lambda^2C_4\cosh(\lambda L)=0$$
$$C_2=C_4=0$$
$$C_3\sinh(\lambda L)+C_4\cosh(\lambda L)=0\Rightarrow C_3=0$$
$$C_1\sin(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)=0\Rightarrow C_1\sin(\lambda L)=0\ \Rightarrow\lambda=\frac{n\pi}{L}$$
$$\omega_j=\sqrt{\frac{gEI}{w}}\lambda_j^{\,2}=\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{gEI}{w}}$$
$$y=\sum_j A_j\sin\!\left(\frac{j\pi}{L}x\right)\exp(i\omega_j t)$$

9

両端埋め込み梁だったら

$$Y\big|_{at\,x=0}=Y\big|_{at\,x=L}=0,\ Y'\big|_{at\,x=0}=Y'\big|_{at\,x=L}=0$$
$$Y=C_1\sin(\lambda x)+C_2\cos(\lambda x)+C_3\sinh(\lambda x)+C_4\cosh(\lambda x)$$
$$Y\big|_{at\,x=0}=C_2+C_4=0$$
$$Y\big|_{at\,x=L}=C_1\sin(\lambda L)+C_2\cos(\lambda L)+C_3\sinh(\lambda L)+C_4\cosh(\lambda L)=0$$
$$Y'\big|_{at\,x=0}=\lambda C_1+\lambda C_3=0$$
$$Y'\big|_{at\,x=L}=\lambda C_1\cos(\lambda L)-\lambda C_2\sin(\lambda L)+\lambda C_3\cosh(\lambda L)+\lambda C_4\sinh(\lambda L)=0$$
$$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\\sin(\lambda L)&\cos(\lambda L)&\sinh(\lambda L)&\cosh(\lambda L)\\\cos(\lambda L)&-\sin(\lambda L)&\cosh(\lambda L)&\sinh(\lambda L)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{Bmatrix}=0$$

- 係数側の行列式=0でとけるけど，大変

10

ここまでは斉次解

- 外力がある場合の流れ
  - 斉次解を求め，振動モードごとに分解
  - モーダルアナリシスに持ち込む
  - 振動モードごとの特性を決め
    - 一般化質量
    - 一般化剛性
    - 一般化外力
    - 固有振動数
  - 一自由度系の時に学んだ特異解に持ち込む

11

分布質量系の一般形

$$m(x)\frac{d^2u(x,t)}{dt^2}+c(x)\frac{du(x,t)}{dt}+K(u(x,t))=f(x,t)$$
$$[M]\frac{d^2\{u(t)\}}{dt^2}+[C]\frac{d\{u(t)\}}{dt}+[K]\{u(t)\}=\{f(t)\}$$

- マトリクス表示は空間方向にマトリクス，ベクトル化（手法の一つがFEM，有限要素法），時間については連続関数

$$\{u\}=\{\varphi\}q(t)\quad q(t)=A\exp(\omega t)$$

- とおき，固有値問題に持ち込む

$$\left(\omega^2[M]+\omega[C]+[K]\right)\{\varphi\}q(t)=\{f\}$$

12

いずれにしても，固有値問題であり（複素固有値問題），固有値，固有ベクトルが解になる

- 性質としては

① 固有値は上の定義だと実部が減衰，虚部が固有円振動数を示す

② 固有ベクトルは，振動の形を示し（大きさを示す値ではない），形状関数とも呼ばれる

③ ｑは振動の基準を示すものとして基準座標と呼ばれる

④ 固有ベクトルは固有値問題について直交化する．

⑤ 固有値，固有ベクトルのセットを振動の状況，つまり振動のモードとよぶ．④の性質により、振動モード毎に分解扱うことができる

$$\{u\}=\{\varphi\}q(t)\quad q(t)=A\exp(\omega t)$$

$$\{u\}=\sum_j\{\varphi_j\}q_j(t)\quad q_j(t)=A_j\exp(\omega_j t)$$

13

繰り返しになるが

- 状況毎の解析，モーダルアナリシスmodal analysisが可能になる　→一自由度系に帰結し，その組み合わせとして扱うことができる
  - 線形が条件
  - 調和外力の振動とかステップ外力とかインパルス外力とか
- ｊ次振動モードに関する定義であり，振動モード毎に異なる．
  - 一般化質量　$\mathbf{M}_j={}^T\{\varphi_j\}[M]\{\varphi_j\}$
  - 一般化減衰　$\mathbf{C}_j={}^T\{\varphi_j\}[C]\{\varphi_j\}$
  - 一般化剛性　$\mathrm{K}_j={}^T\{\varphi_j\}[K]\{\varphi_j\}$
  - 一般化外力　$\mathbf{F}_j={}^T\{\varphi_j\}\{f\}$

14

大きさの決め方

- モードごとの解析Modal Analysisなので，ｊ次振動モードに関する定義であり，振動モード毎に異なる．
- 一般化剛性等を値として決めるためには，固有ベクトル，形状関数の値を決める必要があり，
  ① 構造計算ソフトではMj＝１となるような操作，規格化が行われる
  ② 最大振幅を１とすることも行われる
  ③ 物理振幅を見たいときには着目点のベクトルの値を１とすればいい．
  ④ TMDをつけるとしたら，③が適用できる
  ⑤ 刺激係数の考え方

15

例えば，外力の特殊例

- 弦とか単純梁とか簡単な例
  - 斉次解の形は同じ
  - 外力をｆ（ｘ，ｔ）とおく
- 三角関数の直交性から
  - のこるは自乗になる項のみ
  - 他は残らない
- 他には，等分布外力
  - 対称モードのみ
  - 逆対称モードは積分で消える

$$y=\sum_{j=1}y_j=\sum_{j=1}A_j\sin(\frac{j\pi}{L}x)\exp(i\omega_j t)$$

$$F_j(t)=\int\sin(\frac{j\pi}{L}x)f(x,t)dx$$

$$f(x,t)\equiv F_0\sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t)$$

$$F_j(t)=\int\sin(\frac{j\pi}{L}x)F_0\sin(\frac{k\pi}{L}x)\exp(i\omega_e t)dx$$

$$=F_0\int\sin(\frac{j\pi}{L}x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx\exp(i\omega_e t)$$

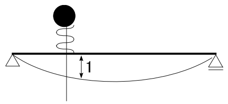
$$=\begin{cases}F_0\int_0^L\sin^2(\frac{k\pi}{L}x)dx\exp(i\omega_e t)=\frac{F_0L}{2}\exp(i\omega_e t) & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

$$\int_0^L\sin^2(\frac{k\pi}{L}x)dx=\int_0^L\frac{1-\cos(2\frac{k\pi}{L}x)}{2}dx=\frac{L}{2}$$

16

TMDがほしくなったら

- 主構造系の物理振幅に興味がある
- 取り付け点のモード形の値を１にすれば良い
  - 取り付け点のモード系を1に規格化したモード形の
    - 一般化質量
    - 一般化減衰
    - 一般化剛性→固有振動数
    - 一般化外力



17