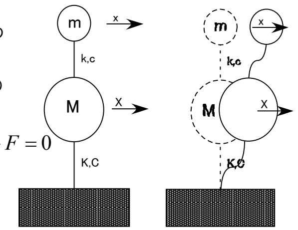
2自由度系への拡張

1

2自由度→動きが二つ

- 現実的には主構造（main structure）M,K,Cに追加の補助構造(**auxiliary** stucture)m,k,cがついているイメージ
- 主構造Mに関しダランベールの定理を適用

$$-M\ddot{X}-KX-C\dot{X}+k(x-X)+c(\dot{x}-\dot{X})+F=0$$



- 同様に
- 追加構造mに関しダランベールの定理を適用

$$-m\ddot{x}-k(x-X)-c(\dot{x}-\dot{X})+f=0$$

2

運動方程式をまとめると

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C+c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{X}\equiv\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{X}}+\begin{bmatrix} C+c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}+\begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{Bmatrix} F \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

- マトリクス形式で書くと見通しがいい

3

これを解く

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}\equiv\begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} A \\ a \end{Bmatrix}\exp(\omega t)=\boldsymbol{\varphi}q(t)$$

- 係数のマトリクス
  - M:質量マトリクス
  - C：減衰マトリクス
  - K：剛性マトリクス
  - F:外力ベクトル

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}q(t)=\mathbf{F}$$

代入整理すると，↑を解けばよくい

SDOFの時と同様，F=0の斉次解から始め，次に特異解に進む

4

固有値問題としての扱い

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}q(t)=0$$

$$\Rightarrow\left(\omega^2\mathbf{M}+\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

- 固有値問題の一般形で，2自由度系であってもそう簡単に解けない
- ωは固有値で減衰項があれば普通は複素数
- ϕは固有ベクトルで振動の場合は振動の形（物理的な振幅のような大きさではない）を示し，**形状関数**（**shape function**）とも呼ばれる．
- ｑは振動の基本軸（座標軸）として**基準座標，一般化座標（generalized coordinate)**とか呼ばれる
  - 座標軸は，直交座標系では位置を示し，座標軸間の角度は９０度で直交しているが，この場合はそうではない．
  - 各次元の成分を示しているのみの意味

5

非減衰C=0の場合

$$\left(\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$\Rightarrow\left|\left(\omega^2\mathbf{I}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)\right|=0$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{M} & 0\\ 0 & \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}K+k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\frac{K}{M}+\frac{K}{M}\frac{k}{K} & -\frac{K}{M}\frac{k}{K}\\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}\end{bmatrix}\quad\because\frac{K}{M}=\omega_M{}^2,\ \frac{k}{m}=\omega_m{}^2,\ \frac{k}{K}=\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_M{}^2+\omega_M{}^2\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M} & -\omega_M{}^2\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}\\ -\omega_m{}^2 & \omega_m{}^2\end{bmatrix}=\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M} & -\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\frac{m}{M}\\ -\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2} & \frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2}\end{bmatrix}$$

$$=\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\quad\because\omega_T{}^2=\frac{\omega_m{}^2}{\omega_M{}^2},\ \mu=\frac{m}{M}$$

6

つづきで固有値を求める

$$\left|\left(\omega^2\mathbf{I}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)\right|=0$$

$$\lambda\equiv\frac{\omega^2}{\omega_M{}^2}$$

$$\left|\lambda\mathbf{I}-\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\left(\lambda-\left(1+\omega_T{}^2\mu\right)\right)\left(\lambda-\omega_T{}^2\right)-\omega_T{}^4\mu=0$$

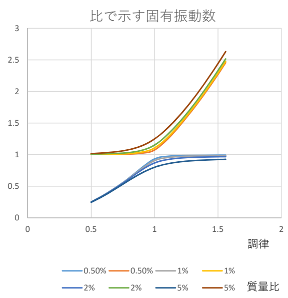
$$\lambda^2-\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\lambda+\left(1+\omega_T{}^2\mu\right)\omega_T{}^2-\omega_T{}^4\mu=0$$

$$\lambda^2-\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\lambda+\omega_T{}^2=0$$

$$\lambda=\omega_T{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)\pm\sqrt{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2\right)^2-4\omega_T{}^2}}{2}$$

$$\omega^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2+2\omega_T\right)\left(1+\omega_T{}^2\mu+\omega_T{}^2-2\omega_T\right)}}{2}$$

$$=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}$$



7

固有値から固有ベクトルを求める

$$\left(\omega_o{}^2\mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$\omega_o{}^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}\equiv\omega_M{}^2\kappa$$

$$=\omega_M{}^2\frac{\omega_T{}^2}{2}\left(\left(\frac{1}{\omega_T{}^2}+1+\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(\frac{1}{\omega_T}+1\right)^2+\mu\right)\left(\left(\frac{1}{\omega_T}-1\right)^2+\mu\right)}\right)$$

$$\left(\omega^2\mathbf{I}-\omega_M{}^2\begin{bmatrix}1+\omega_T{}^2\mu & -\omega_T{}^2\mu\\ -\omega_T{}^2 & \omega_T{}^2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\varphi}=0$$

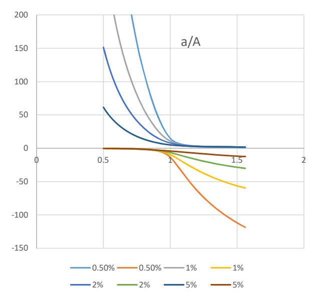
$$\omega_M{}^2\begin{bmatrix}\kappa-1-\omega_T{}^2\mu & \omega_T{}^2\mu\\ \omega_T{}^2 & \kappa-\omega_T{}^2\end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}=0$$

$$A\left(\kappa-1-\omega_T{}^2\mu\right)+a\omega_T{}^2\mu=0\ \rightarrow a=-\left(\frac{\kappa-1}{\omega_T{}^2\mu}-1\right)A$$

$$A\omega_T{}^2+a\left(\kappa-\omega_T{}^2\right)=0\rightarrow a=-\frac{\omega_T{}^2}{\left(\kappa-\omega_T{}^2\right)}A$$

$$\frac{A}{a}=\frac{\omega_T{}^2\mu}{\kappa-1-\omega_T{}^2\mu}\ and\ =\frac{\kappa-\omega_T{}^2}{\omega_T{}^2}$$

$$\frac{a}{A}=-\left(\frac{\kappa-1}{\omega_T{}^2\mu}-1\right)\ and\ =\frac{\omega_T{}^2}{\kappa-\omega_T{}^2}$$



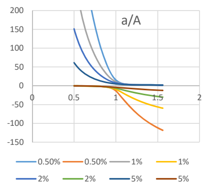
8

調律時の解

- 振動数比を１，質量比を１％あたりにおく
  - 振動数比を１とすること：調律する，調律した
  - 質量比の１％はそんなところ
- 固有値の符号に注意
  - 主構造より少し高い固有振動数の時は追加構造は主構造と反対側にふれる
  - 主構造より少し低い固有振動数の時は追加構造は主構造と同じ側にふれる

$$\omega^2 = \omega_M{}^2 \frac{1}{2}\left((2+\mu) \pm \sqrt{(4+\mu)\mu}\right) \approx \omega_M{}^2 \frac{1}{2}(2.01 \pm 0.20) = \omega_M{}^2 (0.905 \ or \ 1.11)$$

$$\frac{a}{A} = -9.5 \ \ or\, 10.5$$



9

振動の形

- 固有ベクトル：形状関数
- 振動数の低い方から１次，２次，３次
  - ２自由度系では２次まで
- 基準座標毎の振動
  - 振動モード
    - 振動の状況
      - 振動モード形＝形状関数
  - 振動モード毎の解析
    - Modal analysis

10

モーダルアナリシス

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X} \equiv \begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ a \end{Bmatrix} \exp(\omega t) = \boldsymbol{\varphi} q(t)$$

$$\mathbf{X}_j \equiv \begin{Bmatrix} X_j \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_j \\ a_j \end{Bmatrix} \exp(\omega_j t) = \mathbf{A}_j \exp(\omega_j t)$$

$$= \boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)$$

- 固有値問題の解だから直交性が使えて

$$\left(\omega_j{}^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_j + \omega_j \mathbf{C}\mathbf{A}_j + \mathbf{K}\mathbf{A}_j\right)\exp(\omega_j t) = \mathbf{F}$$

$$\left(\omega_j{}^2 \mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{A}_j + \omega_j \mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}_j\right)\exp(\omega_j t) = \mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{F}$$

$\mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{A}_j$: *generalized Mass*

$\mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_j$: *generalized damping*

$\mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}_j$: *generalized stiffness*

$\mathbf{A}_j{}^{-1}\mathbf{F}$: *generalized external force*

11

２自由度系の一般化質量

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

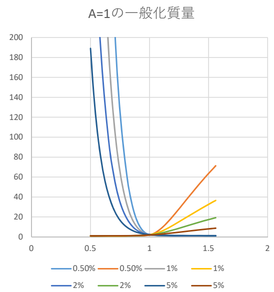
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{A} = -\left(\frac{\kappa - 1}{\omega_T{}^2 \mu} - 1\right) \ and \ = \frac{\omega_T{}^2}{\kappa - \omega_T{}^2}$$

$$M_j = \left(M + m\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa - \omega_T{}^2}\right)^2\right)A^2 = M\left(1 + \mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa - \omega_T{}^2}\right)^2\right)A^2$$

$$A \equiv 1$$

$$M_j = M\left(1 + \mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j - \omega_T{}^2}\right)^2\right)$$



12

正弦波外力があった場合の応答

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\varphi}q(t)$$

$$\mathbf{X}_j\equiv\boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j\ddot{q}_j(t)+\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_j\dot{q}_j(t)+\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j q_j(t)=\boldsymbol{\varphi}^{-1}{}_j\mathbf{F}$$

Modal analysis

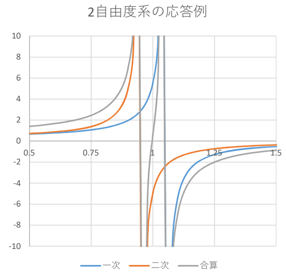
$$M_j\ddot{q}_j(t)+C_j\dot{q}_j(t)+K_jq_j(t)=F_j$$

- 以上のように１自由度系と同じくモード毎に扱うことができる
- 特徴を思い出すと
  - 動的応答倍率
  - 共振を過ぎると位相が反転
    - 共振点は固有モードがふたつあるので二つ

13

動的応答倍率の例

- 質量比μ＝１％
- 同調比ω_T＝１
- κ=0.9048　平方根は0.9512
- κ=1.105 平方根は1.051
- 共振時に振動がなくなるように見える
  - 動的吸振器



$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$\omega_o{}^2=\omega_M{}^2\frac{\left(1+\omega_T{}^2+\omega_T{}^2\mu\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)\left(\left(1-\omega_T\right)^2+\omega_T{}^2\mu\right)}}{2}\equiv\omega_M{}^2\kappa$$

$$A_j=\frac{F_{o_j}M_j/M_jk_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}=\frac{F_{o_j}/M_j\omega_{oj}{}^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}$$

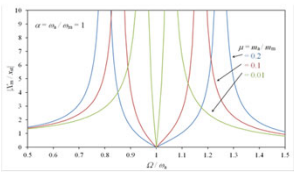
$$=\frac{F_{o_j}\Big/K\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\kappa_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)\right)}=\frac{F_{o_j}}{K}\frac{1\Big/\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\kappa_j}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_{oj}}\right)^2\right)}$$

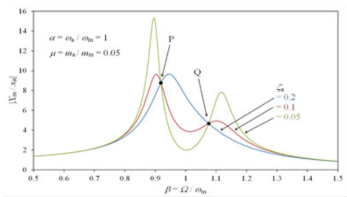
$$M_j=M\left(1+\mu\left(\frac{\omega_T{}^2}{\kappa_j-\omega_T{}^2}\right)^2\right)\ and\ h=0$$

14

減衰がある場合

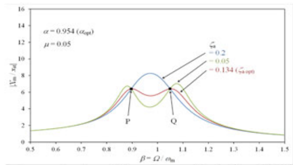
- 減衰がない場合では，系の中で運動エネルギーの損失はない
  - 単なる振動形の重ね合わせの位相差を利用したのみ
  - 自由振動では減衰しない
- 減衰がある場合
- 特に補助振動系に減衰器がある場合
  - 補助振動系を大きく振動させればエネルギー減衰が期待できる
  - 調律減衰器　TMD





15

TMDの最適化



- 種々の判断基準
  - 例えば，P，Qを同じ高さにすれば任意の外力振動数に対し動的応答倍率を大きくしないですむ

表 6.1　各種振動に対する最適 TMD と制振効果（付加減衰）

	調和外力振動	調和地盤振動	自由振動	自励振動	定常不規則強制振動
最適化基準	応答曲線の固定点を等しく最大点にする	増幅率曲線の固定点を等しく最大点にする	２つのモード減衰を等しく最大にする	２つのモードがともに安定でありうる負減衰を最大にする	構造物の２乗平均応答を最小にする
γ_{opt}	$\frac{1}{1+\mu}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$	$\frac{1}{1+\mu}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$	$\frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu}$
$(\xi_T)_{opt}$	$\sqrt{\frac{3}{8}\frac{\mu}{1+\mu}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}\frac{\mu}{1+\mu/2}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+3\mu/4)}{1+3\mu/2}}$
ξ_{eff}	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu/2}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu/4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu/2}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1+3\mu/4}}$

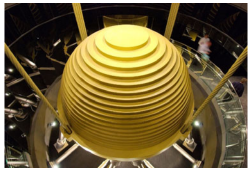
- 表中のγ：振動数比ω_T
- 表中のξ：副振動系の減衰比
- 付加減衰

  - 実際には副振動系の大きな振動は効率は良いが桁の中とか空間的な制約を生む場合が多い

16

台北１０１　WIKI

まとめると



- 2自由度系の定式化
- 適切に座標系を決め，ダランベールの原理を適用すれば良い
- 固有値問題として解く
- 振動モード（状態）毎の解析
  - モーダルアナリシス modal analysis
  - 振動モード形，基準座標（一般化座標）
  - 一般化質量，一般化減衰，一般化剛性，一般化外力
- 振動モードに分解できれば，モード毎には１自由度系の知見を拡張
- 動的吸振器は機械系で外力振動数が決まっている場合によく用いられる
- 橋やビルではTMDの適用例は少なくない．
  - ランドマークタワー，横浜ベイブリッジ．．．．．

17