構造動力学

第４回

1

特異解を求める

- 外力項がある場合の解
- 非減衰系で
  - 正弦波状の外力
  - 基盤が正弦波状に動く　→地震にリンク
  - ステップ外力
- 減衰系で
  - 正弦波状の外力
  - 基盤が正弦波状に動く
  - ステップ外力

2

特異解に着目する理由

- 解の第一項は減衰する
  - δ=0.03で
    - 一波ごとに振幅３％減
    - 十波でおおむね30%減
- つまり↓の解で正減衰なら時間が経てば，特異解しか残らない
  - 時間が経たなければ，斉次解はもちろん重要

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$x(t) = \exp(-h\omega_o t)\left(A_1 \exp(i\omega_D t) + A_2 \exp(-i\omega_D t)\right) + \text{特異解}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$= \frac{1}{N}\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+N}}\right)$$

$$\frac{A_n}{A_{n+N}} = \exp(N\delta) \approx 1 + N\delta + \frac{(N\delta)^2}{2!} + \cdots$$

3

質点への正弦波状外力に対する特異解

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$f(t) = F_o \exp(i\omega_e t)$$

$$x \equiv A\exp(i\omega_e t)$$

$$A\exp(i\omega_e t)\left(-m\omega_e^2 + ic\omega_e + k\right) = F_o \exp(i\omega_e t)$$

$$A = \frac{F_o}{\left(-m\omega_e^2 + ic\omega_e + k\right)} = \frac{F_o/k}{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} \quad \because \frac{c}{k} = \frac{c}{m}\frac{m}{k} = \frac{2h\omega_o}{\omega_o^2} = \frac{2h}{\omega_o}$$

$$A = F_o/k \, \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2 + i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)} = F_o/k \, H(\omega_e)$$

$$\Updownarrow$$

$$X(\omega_e) = \frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

4

動的応答倍率

$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}=F_o/k\,H(\omega_e)$$

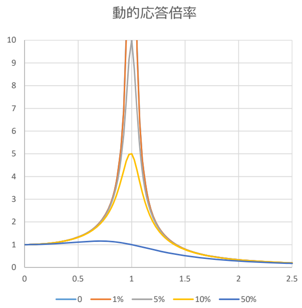
$$|A|=\frac{F_o/k}{\left|1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right|}$$

$$=F_o/k\sqrt{H(\omega_e)H^*(\omega_e)}=F_o/k\,|H(\omega_e)|$$

$$=\frac{F_o/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

$$\frac{|A|}{F_o/k}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

- 静的な変形に対する動的な効果



5

動的応答倍率Hの特徴

- 1から始まり無限大でゼロに漸近
- 外力振動数と固有振動数の一致
  - 共振
  - ピークは１／２ｈ
- フーリエ変換すると
  - 外力と応答の関係
  - Hは伝達関数と見なせる

$$x=A\exp(i\omega_e t)$$

$$=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)$$

$$=\frac{1}{k}H(\omega_e)f(t)$$

$$X(\omega_e)=\frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

6

地盤振動の時の特異解

- 変位はまずは外部座標で考えると

$$u\equiv x+X$$

$$F_\alpha\ \Rightarrow\ -M(\ddot{x}+\ddot{X})$$

$$F_k=-Kx$$

$$F_D=-C\dot{x}$$

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=-M\ddot{X}$$

$$f(t)\Rightarrow -M\ddot{X}$$

- 外力の振動数が大きいとき
  - 系の固有振動数が小さいとき
- 内部的な変位のu=x-X　→０に漸近
  - 内部座標では揺れない
  - 不動点になる
- つまりｘ＝Xとなる
  - 地震計の原理

7

地盤振動の時の特異解　続き

- 基盤から見た変位

$$X\equiv X_0\exp(i\omega_e t)$$

$$f(t)=-M\ddot{X}=M\omega_e{}^2X_0\exp(i\omega_e t)$$

$$x=A\exp(i\omega_e t)$$

$$=\frac{M\omega_e{}^2X_0/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)$$

$$=\frac{X_0\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)$$

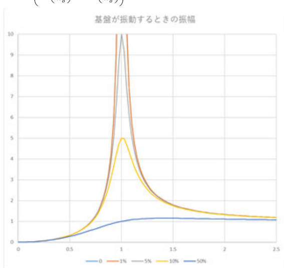
$$\left|\frac{x}{X}\right|=\left|\frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\right|=\frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$

$$u=x+X$$

$$u=A\exp(i\omega_e t)+X$$

$$=\frac{X_0\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)+X_0\exp(i\omega_e t)$$

$$=X_0\frac{1+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}\exp(i\omega_e t)$$



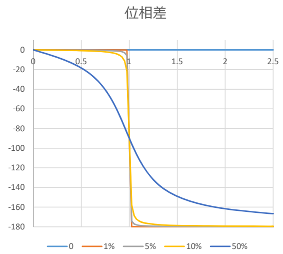
8

位相

- 外力と振動の間に位相差が生じる

$$A=\frac{F_o/k}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$|A|=\frac{F_o/k}{\left|1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right|}=\frac{F_o/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+4h^2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}}$$



$$A=F_o/k\,\frac{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2+i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}$$

$$=F_o/k\,\frac{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2-i2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2\right)^2+\left(2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)\right)^2}$$

$$\arg(A)=\tan^{-1}\left(-\frac{2h\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)}{1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_o}\right)^2}\right)$$

9

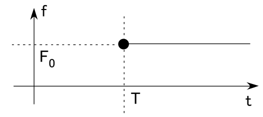
ステップ外力の意味

- 衝撃応答への拡張
- この問題は過渡応答
- 一般解をちゃんと解く

$$\int_{-\infty}^{t}u_{impulse}dt=u_{step}$$

$$\Updownarrow$$

$$u_{impulse}=\frac{du_{step}}{dx}$$



10

ステップ外力

- 運動方程式的な展開

$$f(t-T)=0 \qquad t<T$$
$$=F_e \qquad t\geq T$$
$$T\doteq 0$$
$$f(t)=0 \qquad t<0$$
$$=F_e \qquad t\geq 0$$

後者ｔ＞０の特異解
一般的には時間をTシフトした状況を考える

$$x_e=\frac{F_e}{k}$$

一般解

$$x=\exp(-h\omega t)\left(A_1\exp(i\omega_o\sqrt{1-h^2}\,t)+A_2\exp(-i\omega_o\sqrt{1-h^2}\,t)\right)+\frac{F_e}{k}$$

ｔ＝０での整合条件（区間で言えば初期値）

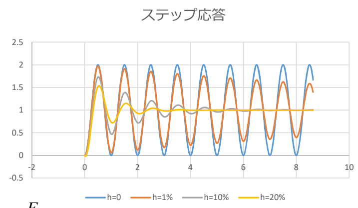
$$x=\dot{x}=0$$

$$x(t)=\exp(-h\omega_o t)\left(A_1\exp(i\omega_D t)+A_2\exp(-i\omega_D t)\right)+\frac{F_e}{k}$$
$$\because\ \omega_D=\omega_o\sqrt{1-h^2}$$
$$x(t=0)=(A_1+A_2)+\frac{F_e}{k}=0$$
$$\dot{x}(t=0)=-h\omega_o(A_1+A_2)+(A_1 i\omega_D-A_2 i\omega_D)=0$$
$$A_1(-h\omega_o+i\omega_D)=A_2(h\omega_o+i\omega_D)$$
$$A_1\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{(h\omega_o+i\omega_D)}=A_2$$

$$(A_1+A_2)+\frac{F_e}{k}=0$$
$$=\left(1+\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{(h\omega_o+i\omega_D)}\right)A_1+\frac{F_e}{k}$$
$$=\frac{i\omega_D}{(h\omega_o+i\omega_D)}A_1+\frac{F_e}{k}$$
$$A_1=-\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o+i\omega_D}{i\omega_D}$$
$$A_2=A_1\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{(h\omega_o+i\omega_D)}=-\frac{F_e}{k}\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{i\omega_D}$$
$$A_1+A_2=-\frac{F_e}{k}$$
$$A_1-A_2=-\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o+i\omega_D}{i\omega_D}+\frac{F_e}{k}\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{i\omega_D}=-\frac{F_e}{k}\frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$

11

ステップ外力　つづき



$$x(t)=\exp(-h\omega_o t)\left(A_1\exp(i\omega_D t)+A_2\exp(-i\omega_D t)\right)+\frac{F_e}{k}$$
$$\because\ \omega_D=\omega_o\sqrt{1-h^2}$$
$$A_1+A_2=-\frac{F_e}{k}$$
$$A_1-A_2=-\frac{F_e}{k}\frac{h\omega_o+i\omega_D}{i\omega_D}+\frac{F_e}{k}\frac{(-h\omega_o+i\omega_D)}{i\omega_D}=-\frac{F_e}{k}\frac{2h}{i\sqrt{1-h^2}}$$
$$x(t)=\exp(-h\omega_o t)\left(A_1\exp(i\omega_D t)+A_2\exp(-i\omega_D t)\right)+\frac{F_e}{k}$$
$$=\exp(-h\omega_o t)\left((A_1+A_2)\cos(\omega_D t)+(A_1-A_2)i\sin(\omega_D t)\right)+\frac{F_e}{k}$$
$$=-\frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t)+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right)+\frac{F_e}{k}$$

12

衝撃応答

$$\omega_D = \omega_o\sqrt{1-h^2}$$

$$x_{step}(t) = -\frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{F_e}{k}$$

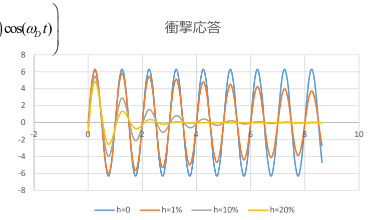
$$x_{impulse}(t) = \frac{dx_{step}(t)}{dt}$$

$$= \frac{h\omega_o F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) - \frac{\omega_D F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(-\sin(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\left(\frac{2hh\omega_o}{\sqrt{1-h^2}} + \omega_D\right)\sin(\omega_D t) + \left(h\omega_o - \frac{2h\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}\right)\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\left(\frac{2hh\omega_o + \omega_o(1-h^2)}{\sqrt{1-h^2}}\right)\sin(\omega_D t) + (h\omega_o - 2h\omega_o)\cos(\omega_D t)\right)$$

$$= \frac{F_e}{k}\frac{\exp(-h\omega_o t)}{\sqrt{1-h^2}}\left((1+h^2)\omega_o\sin(\omega_D t) - h\omega_D\cos(\omega_D t)\right)$$



13

単位の外力

- 単位＝１の大きさ
- 単位ステップ
- 単位衝撃
  - 線形だったら応答は大きさ倍

$$t > 0$$

$$x_{unit\,step}(t) = -\frac{1}{k}\exp(-h\omega_o t)\left(\cos(\omega_D t) + \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}\sin(\omega_D t)\right) + \frac{1}{k}$$

$$x_{unit\,impulse}(t) = \frac{\exp(-h\omega_o t)}{k\sqrt{1-h^2}}\left((1+h^2)\omega_o\sin(\omega_D t) - h\omega_D\cos(\omega_D t)\right)$$

- ある時刻の外力の連続
  - 応答の重ね合わせ

$$f(t) = \{\cdots, f(t_n), \cdots\}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \sum_i f(t_i)\, x_{unit\,impulse}(t - t_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(T)\, x_{unit\,impulse}(t-T)\, dT$$

14

不規則振動への拡張

- 畳み込み積分　convolution

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(T)\, x_{unit\,impulse}(t-T)\, dT$$

- これをフーリエ変換，Tとｔ－Tで別々に変換することができて

$$U(\omega) = F(\omega)\, X_{unit\,impulse}(\omega)$$

$$X(\omega_e) = \frac{1}{k}H(\omega_e)F(\omega_e)$$

$$X_{unit\,impulse}(\omega) = \frac{1}{k}H(\omega_e)$$

$$\langle\langle U(\omega)U^*(\omega)\rangle\rangle = \langle\langle F(\omega)F^*(\omega)\rangle\rangle \frac{1}{k}H(\omega_e)\frac{1}{k}H^*(\omega_e)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\langle U(\omega)U^*(\omega)\rangle\rangle}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\langle\langle F(\omega)F^*(\omega)\rangle\rangle}{T}\frac{1}{k^2}H(\omega_e)H^*(\omega_e)$$

$$S_U(\omega) = S_F(\omega)\frac{1}{k^2}|H(\omega_e)|^2$$

- 不規則外力とするとFは不確定，確率量，Xはシステムで決まる決定的な量
  - 確率的な扱い
  - 結果的にUも確率的な扱いが必要

15