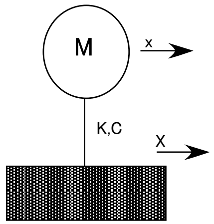
構造動力学

三回目

1

バネ質量減衰系で1自由度系

- 1自由度系なのは
  - 基盤の振動は与えられ，着目運動ではない
- 質量　M
- バネ定数　K
- 減衰係数　C
- 質点の変位　x
- 基盤の変位　X



$$F_\alpha = -M\ddot{x}$$
$$F_k = -Kx \quad or \ -K(x-X)$$
$$F_D = -C\dot{x} \ \ or \ \ -C(\dot{x}-\dot{X})$$

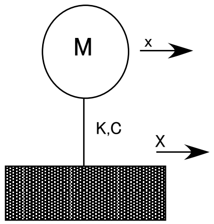
2

ダランベールの原理を適用して運動方程式

- 英語で書けば　d'Alembert's principle
  - F_{ext}は外部から作用する力→外力

$$0 = -M\ddot{x} - Kx - C\dot{x} + F_{ext}$$
$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_{ext}$$

- 2階の微分方程式で線形だったら
  - 右辺側の外力ある解
    - 特異解
  - 右辺側の外力がゼロで斉次式にして
    - 斉次解
  - 斉次解＋特異解　で一般解
    - 一般解に初期条件を与えて外力に対する応答解
- 1自由度系の運動方程式でまずは斉次解



3

1自由度系の運動方程式でまずは斉次解 F=0

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F$$
$$C = 0$$
$$M\ddot{u} + Ku = F$$
$$F = 0$$
$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$
$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

- C=0を想定
- 自明でない解
  - A≠0

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$
$$\ddot{u} + \frac{K}{M}u = 0$$
$$u \equiv A\exp(\lambda t)$$
$$\left(\lambda^2 A\exp(\lambda t) + \frac{K}{M}A\exp(\lambda t)\right) = 0$$
$$\left(\lambda^2 + \frac{K}{M}\right)A\exp(\lambda t) = 0$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{K}{M}} \quad \because i = \sqrt{-1}$$
$$u = A_1\exp(i\omega t) + A_2\exp(-i\omega t) \because \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$
$$= A_1\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right) + A_2\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)$$
$$= (A_1 + A_2)\cos(\omega t) + i(A_1 - A_2)\sin(\omega t)$$

4

重要な特性，用語

- ω　角振動数　角固有振動数
- ω／2π　振動数＝f　　固有振動数
  - 周波数　電気では
- 1／f＝ 2π／ω　周期　固有周期

5

減衰系　C≠0としたときの斉次解

- 特性方程式を解くことにより，自明ではない解(non-trivial solution)

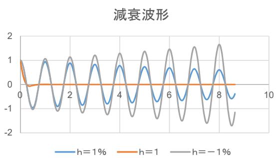
$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0$$
$$\ddot{u}+\frac{C}{M}\dot{u}+\frac{K}{M}u=0$$
$$u\equiv A\exp(\lambda t)$$
$$\left(\lambda^2 A\exp(\lambda t)+\frac{C}{M}\lambda A\exp(\lambda t)+\frac{K}{M}A\exp(\lambda t)\right)=0$$
$$\boxed{\left(\lambda^2+\frac{C}{M}\lambda+\frac{K}{M}\right)}A\exp(\lambda t)=0$$

$$\lambda=\frac{-\frac{C}{M}\pm\sqrt{\left(\frac{C}{M}\right)^2-4\frac{K}{M}}}{2}$$
$$\frac{C}{M}\equiv 2h\omega$$
$$\lambda=\frac{-2h\omega\pm\sqrt{(2h\omega)^2-4\omega^2}}{2}\quad\because\omega=\sqrt{\frac{K}{M}}$$
$$=\left(-h\pm\sqrt{h^2-1}\right)\omega$$
$$=\left(-h\pm i\sqrt{1-h^2}\right)\omega$$
$$\equiv\lambda_D=-h\omega\pm i\omega_D$$

6

減衰応答

- ω_Dは減衰効果が反映された角振動数
- 減衰角固有振動数
- 減衰定数・減衰比　h
  - 正減衰
  - 臨界減衰
  - 負減衰



$$u\equiv A\exp(\lambda t)=(A_1+A_2)\cos(\omega t)+i(A_1-A_2)\sin(\omega t)$$
$$\lambda=\frac{-2h\omega_o\pm\sqrt{(2h\omega_o)^2-4\omega_o^2}}{2}\quad\because\omega_o=\sqrt{\frac{K}{M}}$$
$$=\left(-h\pm\sqrt{h^2-1}\right)\omega_o$$
$$=\left(-h\pm i\sqrt{1-h^2}\right)\omega_o$$
$$\equiv\lambda_D=-h\omega_o\pm i\omega_D$$
$$\because\omega_D=\omega_o\sqrt{1-h^2}$$
$$u=A_1\exp(-h\omega_o t+i\omega_D t)+A_2\exp(-h\omega_o t-i\omega_D t)$$
$$=\exp(-h\omega_o t)\left(A_1\exp(i\omega_D t)+A_2\exp(-i\omega_D t)\right)$$
$$=\exp\left(-h\frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}t\right)\left(A_1\exp(i\omega_D t)+A_2\exp(-i\omega_D t)\right)$$
$$=\exp\left(-h\frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}t\right)\left((A_1+A_2)\cos(\omega_D t)+i(A_1-A_2)\sin(\omega_D t)\right)$$

7

減衰比

- 臨界減衰h＝1，そのときの減衰係数が$C_{critical}$
  - 二種類の特性の境界
    - 正減衰（簡単には減衰）振動
    - 負減衰（発散）振動
- 減衰係数比なので減衰比
  - ζともかく
- 比較的小さな構造で基礎が動くような振動（地震）で
  - h＝3%程度
- 構造上部の振動（強風とか交通振動とか）
  - h＝1%程度

$$\frac{C}{M}\equiv 2h\omega$$
$$h=1$$
$$\frac{C_{critical}}{M}\equiv 2\omega$$
$$\frac{C}{M}\equiv 2h\omega$$
$$C=2h\omega M=hC_{critical}$$
$$\boxed{h=\frac{C}{C_{critical}}}$$

8

減衰比で用語も意味も似ているのが「対数減衰率」

• 減衰振幅の比を対数で示したもの
• 吊り橋で0．03
• 桁橋で0．05とか
• 振動が観測できる場合に用いられる傾向がある
• 減衰比は解析には定石

$$u = \exp\left(-h\frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}t\right)\left(A_1\exp(i\omega_D t) + A_2\exp(-i\omega_D t)\right)$$

$$amplitude\ ratio\ at\ t = nT_D\ and\ t = (n+1)T_D\ \ \because T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{\exp\left(-h\frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}nT_D\right)}{\exp\left(-h\frac{\omega_D}{\sqrt{1-h^2}}(n+1)T_D\right)}$$

$$= \exp\left(h\frac{\omega_D T_D}{\sqrt{1-h^2}}\right) = \exp\left(\frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}\right)$$

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} = \delta$$

$$\frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} = \delta$$

$$2\pi h \approx \delta$$

9

外力がある場合の応答解

• 非減衰系で
  • 正弦波状の外力
  • 基盤が正弦波状に動く →地震にリンク
  • ステップ外力
• 減衰系で
  • 正弦波状の外力
  • 基盤が正弦波状に動く
  • ステップ外力

10